COLEGIO DE BACHILLERES

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

FASCÍCULO 2. LA FUNCIÓN DERIVADA

Autores: José Luis Alaníz Miranda
Rosa María Espejel Mendoza
Mario Luis Flores Fuentes
Alberto Luque Luna
Ángel Martínez Jiménez

Í N D I C E

INTRODUCCIÓN

El Cálculo Diferencial e Integral es una herramienta matemática que surgió en el siglo XVII para resolver algunos problemas de geometría y de física. El problema de hallar una recta tangente a la gráfica de una función en un punto dado y la necesidad de explicar racionalmente los fenómenos de la astronomía o la relación entre distancia, tiempo, velocidad y aceleración, estimularon la invención y el desarrollo de los métodos del Cálculo.

Sobresalieron entre sus iniciadores John Wallis, profesor de la Universidad de Oxford e Isaac Barrow, profesor de Newton en la Universidad de Cambridge, Inglaterra. Pero un método general de diferenciación e integración fue descubierto solo hacia 1665 por el Inglés Isaac Newton y posteriormente por Gottfried Wilhelm Von Leibniz, nacido en Leipziy, Alemania, por lo que a ellos se les atribuye la invención del Cálculo.

En la actualidad el Cálculo se aplica al estudio de problemas de diversas áreas de la actividad humana y de la naturaleza: la economía, la industria, la física, la química, la biología, para determinar los valores máximos y mínimos de funciones, optimizar la producción y las ganancias o minimizar costos de operación y riesgos.

En este fascículo estudiarás una parte del Cálculo conocida como Cálculo Diferencial.

Para abordar estos contenidos es necesario que apliques los conocimientos que adquiriste de álgebra, geometría, trigonometría y geometría analítica. El objetivo de este material es apoyarte para que adquieras el concepto de función derivada, aprendas técnicas para derivar funciones y apliques estos conocimientos en la construcción de gráficas y la solución de problemas a partir de la discusión de situaciones de la vida real, para que obtengas elementos que te permitan estar en condiciones de tomar decisiones acertadas y pronosticar los cambios experimentan dos cantidades relacionadas funcionalmente además de proporcionarte las bases para que accedas al estudio del Cálculo Integral.

CAPÍTULO 1

LA FUNCIÓN DERIVADA

PROPÓSITO

Antes de iniciar el estudio de este capítulo es conveniente que analices el siguiente cuadro.

¿Qué voy a aprender?	¿Cómo lo voy a lograr?	¿Para qué me va a servir?
• La derivada.	• A partir del concepto de razón de cambio que estudiaste en el fascículo anterior y aplicando la noción intuitiva de límite.	• Para calcular las razones de cambio instantáneas y pendientes de rectas tangentes a curvas.
• Derivación de funciones algebraicas.	• Aplicando la definición de derivada y el método de los cuatro pasos.	• Para obtener derivadas de funciones de una manera más eficientes.
• Regla de la cadena.	• Generalizando a partir de casos particulares.	• Para derivar funciones compuestas.
• Derivadas de orden superior.	• Derivando reiteradamente a las derivadas	• Para resolver problemas en donde se emplean las derivadas sucesivas
• Derivada de funciones implícitas.	• Aplicando las técnicas de derivación y la resolución de ecuaciones.	• Para obtener sin despejar previamente la derivada de una función implícita.
• Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas.	• A partir del hecho de que las funciones exponenciales y logarítmicas son funciones inversas.	• Para resolver problemas de aplicación de éstas derivadas.

¿Qué voy a aprender?	¿Cómo lo voy a lograr?	¿Para qué me va a servir?
• Derivadas de funciones trigonométricas.	• Retomando los conocimientos de funciones trigonométricas.	• Para aplicarlas a cuestiones relativas a rotaciones y velocidades de puntos sobre ruedas y otros problemas.

CAPÍTULO 1

LA FUNCIÓN DERIVADA

1.1 LA DERIVADA

En el fascículo anterior utilizaste el concepto de la razón de cambio a través de problemas o situaciones de la vida real e ilustraste gráficamente $h \to 0$ o, dando una interpretación de la razón de cambio.

Todo lo anterior es la base para el estudio de la derivada a través de la discusión de un problema de la vida real. Y a partir del concepto de la DERIVADA, aprenderás las técnicas para derivar funciones y aplicar estos conocimientos en la construcción de gráficas y solución de problemas.

Analiza el siguiente problema:

Un móvil se desplaza de acuerdo a la función $f(t)=3t^2 - 2t + 1$, Ricardo observa este desplazamiento y le pregunta a Oscar, ¿Cómo se puede determinar la velocidad instantánea o tangencial de dicho móvil, después de que transcurren 3 seg. desde el inicio el movimiento? Oscar respondió; ¡no lo se!, tal vez aplicando conceptos de física. Ricardo le contestó, para saber con exactitud la velocidad instantánea aplicaré mis conocimientos de razón de cambio promedio, razón de cambio instantánea, limites y continuidad; Oscar replicó ¡eso es imposible!.

¿Qué harías para resolver el problema?

Reflexiona y después analiza la solución que te presentamos

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Con base al problema del móvil, contesta las siguientes preguntas.

a) ¿Sabes que tipo de función es?

____

b) ¿Es una función continua o discontinua?

____

c) ¿Por qué es continua o discontinua?

____

d) ¿Qué entiendes por velocidad instantánea?

____

e) ¿Cuál sería su razón de cambio de la velocidad en el móvil?

____

f) ¿Cuál es la velocidad de en los tres segundos que transcurren?

____

g) ¿Puedes resolverlo empleando la función derivada a través de la razón de cambio como límite?

____

¿Aún no puedes resolver el problema anterior?

Sigue analizando la información que te presentamos, ésta te dará más elementos.

Una bola sube verticalmente alcanzando una altura $S = 14t - 4.9t^2$ m, en t segundos después de lanzada. Halla la razón de incremento (Cambio) de altura de la bola en m/s al tiempo t_1

Analiza la solución: digamos que la bola esta a una altura S_1 al tiempo t_1 y S_2 a t_2.

El incremento promedio de la elevación de la bola durante el intervalo $t_1 < t < t_2$ es,

$$\boxed{\frac{\text{Incremento de altura}}{\text{Tiempo transcurrido}} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}}$$

Geométricamente esta magnitud esta representada por la pendiente de la Secante a través de los puntos (t_1, S_1) y (t_2, S_2) del diagrama altura tiempo.

Si $t_2 - t_1$ es pequeño, $S_2 - S_1/\ t_2 - t_1$ representa aproximadamente la velocidad de ascenso de la bola en cualquier instante del intervalo.

Para calcular la relación precisa del incremento de altura al tiempo t_1 hacemos que $t_1 - t_2 \to 0$. Así,

$$\frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \text{Pendiente de la Secante}$$

$$\frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \text{Velocidad promedio de ascenso}$$

$$\frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \frac{14t_2 - 4.9t_2^2 - 14t_1 + 4.9t_1^2}{t_2 - t_1} = 14\frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_1} - 4.9\frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2 - t_1} = 14 - 4.9(t_2 + t_1)$$

Al aproximarse t_2 a t_1, en el intervalo $t_2 - t_1$, entonces $t_2 + t_1$ tiende a $2t_1$. Por lo tanto la pendiente $S_2 - S_1/\ t_2 - t_1$ de la secante se convierte en la pendiente de la tangente y de la curva. Es decir:

$$\lim_{h \to 0} = \lim_{t_2 \to t_1}\left[14 - 4.9(t_2 + t_1)\right] = 14 - 9.8t$$

La velocidad de ascenso v a los t_1 segundos es

$V = 14 - 9.8\,t_1$ m/seg.

Nota: Que la razón de cambio consta de dos términos separados. El término 14 es la razón de cambio de 14t y -9.8t es la razón de cambio de $-4.9t^2$ al tiempo t_1.

La velocidad o razón de cambio instantánea de elevación con relación al tiempo en el instante se representa gráficamente por la pendiente de la curva en $t = t_1$.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Con base al problema de la bola, contesta las siguientes preguntas.

¿Cuándo es cero la velocidad?

____

¿Cuándo esta, la bola a mayor altura?

____

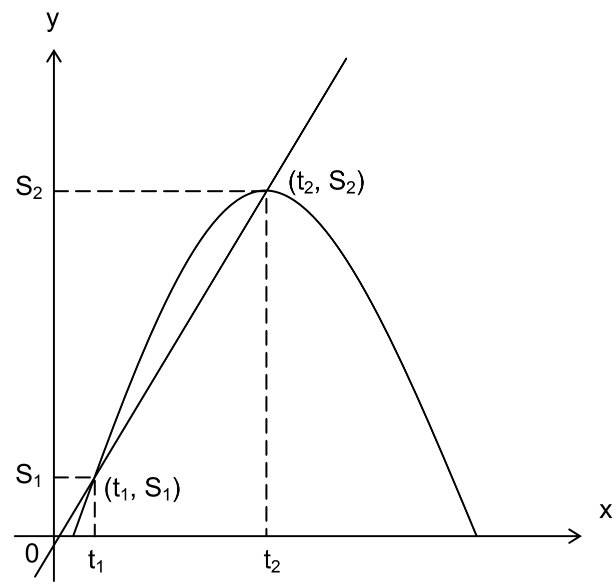
¿A qué velocidad vuelve la pelota al piso?

____

1.1.1 CONCEPTO DE DERIVADA

Precisamente como dy / dx es la razón de cambio de “y” con respecto a “x”, entonces podemos concluir que:

Velocidad v =ds / dt = $\lim_{t_2 - t_1 \to 0} S_s - S_1 / t_2 - t_{11}$



Gráfica No.1

¿Has aclarado algunas dudas?

Continúa el estudio y analiza el siguiente problema.

La posición de una partícula suspendida en el espacio tiene como ecuación $f(x) = x^3 - 4x - 5$. Determina la pendiente (m) y la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto cuya abscisa es igual a 2

Solución:

a) De la derivada como límite, que es la razón de cambio de la función, en la pendiente que une los puntos (x , f (x)).

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x) = x^3 - 4x - 5$$

$$f(x+h) = (x+h)^3 - 4(x+h) - 5$$

$$f(x+h) = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 4x - 4h - 5$$

$$f(x) = \lim_{h \to 0} = \frac{f(x+h) = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 4x - 4h - 5 - (x^3 - 4x - 5)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} = \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 4h}{h} \quad = \lim_{h \to 0} = \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 - 4)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} = 3x^2 + 3xh + h^2 - 4 \quad = \quad 3x^2 + 3x(0) - 4$$

La razón de cambio para la función es la expresión $f'(x) = 3x^2 - 4$, donde:

La razón de cambio para $x^3 = 3x^2$
La razón de cambio para $-4x = -4$

Siendo la derivada $f'(x) = 3x^2 - 4$ y el valor de la pendiente (m); si $f'(x) = m$, entonces:

$m = 3x^2 - 4$ para $x = 2$

$m = 3\,(2)^2 - 4 = 3\,(4) - 4 = 12 - 4 = 8 \quad \therefore \quad m = 8u.$

La ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^3 - 4x - 5$ en $x = 2$.

Si $x = 2$, $f(x) = (2)^3 - 4\,(2) - 5 = 8 - 8 - 5 = -5$.

El punto de tangencia es $P_1(2,-5)$ y $m = 8u$ es la pendiente de la recta tangente. Por lo tanto la ecuación tiene la forma:

$y - y_1 = m\,(x - x_1)$

$y - (-5) = 8\,(x - 2)$

$y + 5 = 8x - 16$

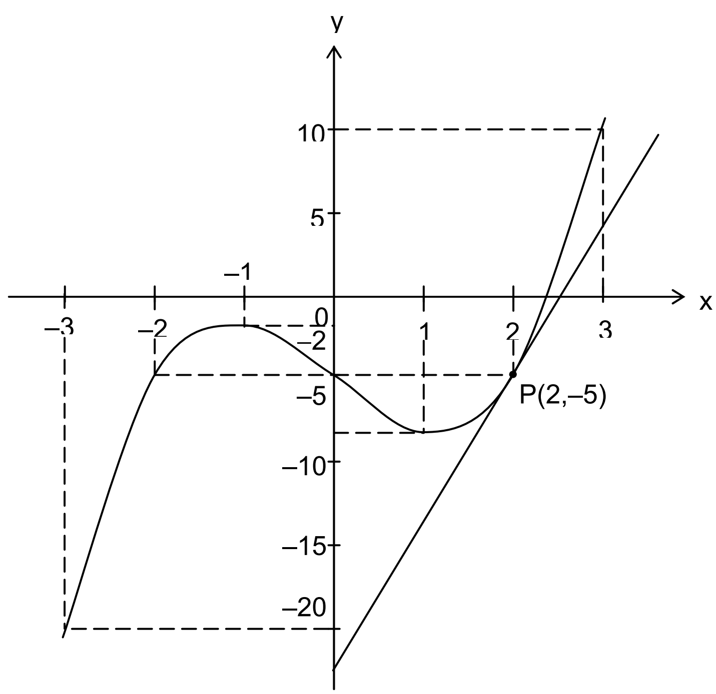
$y = 8x - 16 - 5$

$y = 8x - 21 \rightarrow$ ecuación de la recta tangente en donde 8 es la pendiente
y la ordenada al origen es –2.

Graficando $f(x) = x^3 - 4x - 5$ con base a la tabla siguiente:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
f (x)	–20	–5	–2	–5	–8	–5	–10

Podemos trazar la tangente a la gráfica en P(2,–5), tomando en cuenta que corta al eje "y" en (0,–2) y su pendiente es $m = \frac{8}{1}$



Gráfica No.2

Muchos fenómenos físicos implican cantidades variables, la velocidad de un cohete, la devaluación de la moneda por la inflación, el número de bacterias de un cultivo, la intensidad de un movimiento telúrico, el voltaje de una señal eléctrica, etc.

En este fascículo desarrollaremos las herramientas matemáticas para expresar con precisión las razones o tazas de cambio.

Primero se revisarán algunas ideas anteriores, supón que $P(x,y)$ y $Q(x_1,y_1)$ son los puntos de la gráfica de una función f. Entonces la recta secante P y Q tienen la pendiente:

$$m.\sec = \frac{Y_1 - Y}{X_1 - X}$$

o bien, puesto que $y = f(x)$ y $y_1 = f(x_1)$,

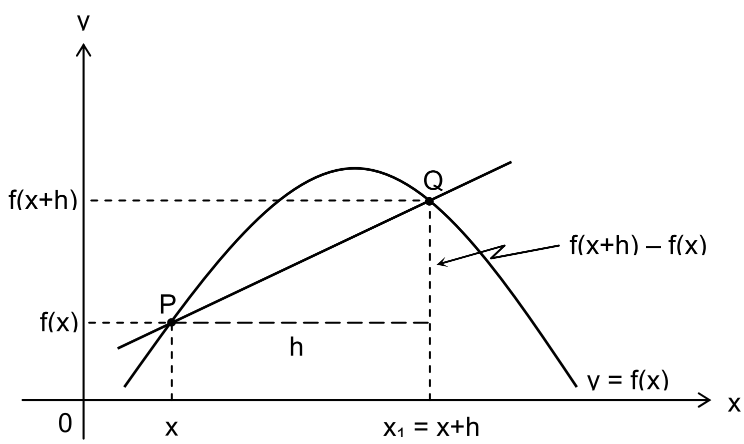
$$m.\sec = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \qquad (1)$$

haciendo, $h = x_1 - x$, entonces $x_1 = x + h$

de tal manera que la ecuación (1) puede escribirse así

$m \sec =$ $m.\sec = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Observemos la gráfica No 3.



Gráfica No. 3

De la gráfica se observa que $P(x,f(x))$ y $Q(x_1,f(x+h)–f(x))$ ó $Q(x+h,f(x+h)–f(x))$.

Cuando Q tiende P sobre la gráfica de f, X_1 tiende a Xo y por consiguiente $h = X_1 – X$ tiende a cero.

Además, cuando Q tiende a P, la recta secante que une P y Q tiende a la recta tangente en P. El cual nos conduce a la siguiente definición:

Si P (x, y) es un punto de la gráfica de una función f, entonces la recta tangente a la gráfica de f en P se define como la recta que pasa por P y tiene la pendiente siempre que exista el limite.

$$m \tan = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (2)$$

Siempre que exista el límite, se hará referencia a la recta tangente en $x_1 = x$.

DEFINICIÓN:

La derivada de una función f es una f definida por:

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (3)$$

El dominio de f, consta de todas las “x” en la que existe este límite;

NOTACIÓN: El símbolo f (x) se lee “f prima de x”.
Sí x esta en el dominio de f, entonces se dice que f es diferenciable en x. De (2) y (3) se sigue que si f es diferenciable en Xo, el valor de la derivada en x es:

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = m \tan$$

En otros términos, la derivada de f es una función cuyo valor en $X_1 = X$ es la pendiente (m = tang θ) de la recta tangente a y = f(x) en $x_1 = x$.

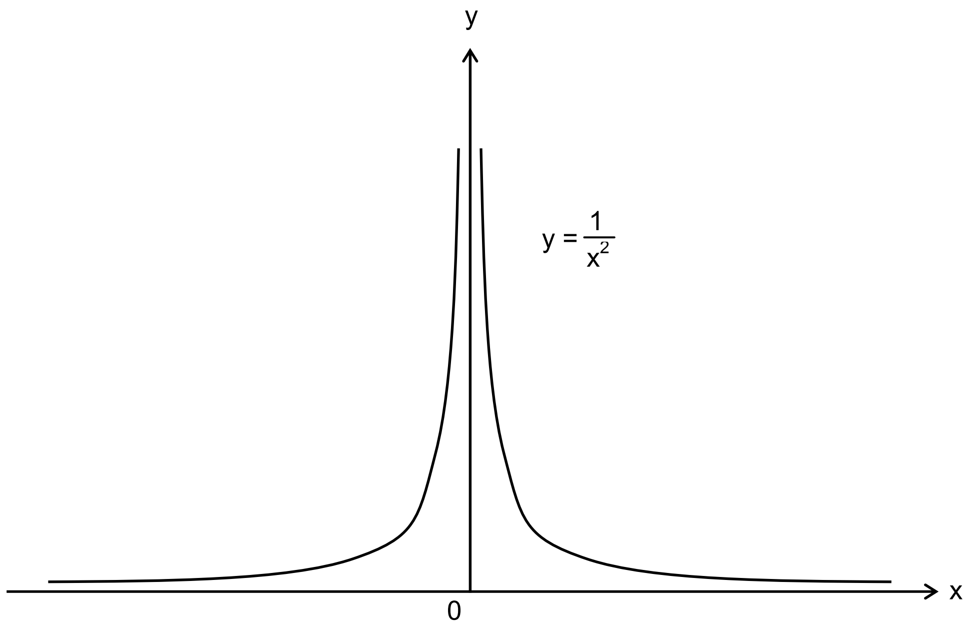
El dominio de la derivada es el conjunto de los valores de X para lo que existe una recta tangente a Y = f(x).

Existen tres maneras comunes en las que la función f puede no ser diferenciable en un punto, formuladas de una manera informal, estas pueden clasificarse como:

a) Rupturas.
b) Vértices.
c) Tangentes verticales.

Ruptura.

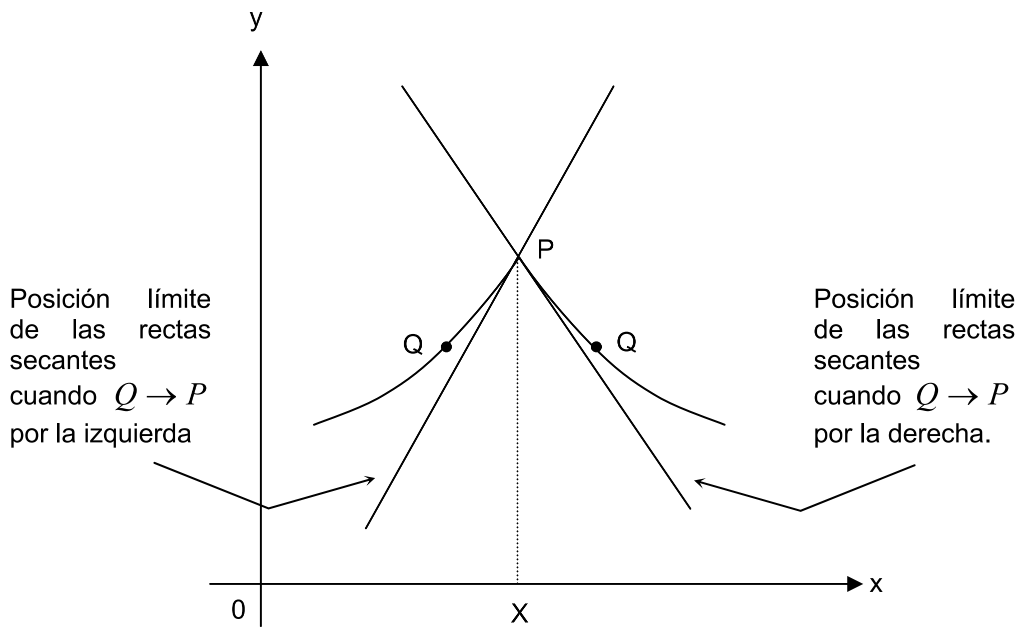
a) *Es evidente que si la gráfica de una función f tiene una “ruptura” en $X_1=X$ (ver gráfica 4) entonces la función no puede tener una tangente en X. Esto se demuestra cuando más preciso sea el término de una “ruptura”.



Gráfica No. 4

Vértices.

b) La gráfica de una función f tiene un “vértice” en un punto P (X, f (X)) si la gráfica de f no se interrumpe en P y la posición límite de la recta secante que une a P y Q depende de si Q tiene a P por la izquierda o por la derecha (ver gráfica 5). En los vértices no existe una recta tangente, ya que las pendientes de las rectas no tienen un límite (por ambos lados).



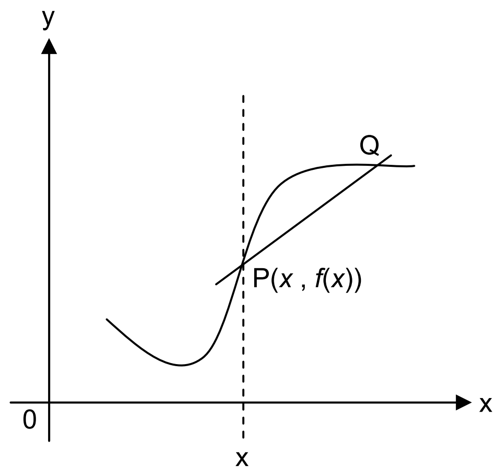
Gráfica No. 5

Tangentes verticales.

c) No existe, puesto que los límites por un lado no son iguales. Por consiguiente, f (x) no es diferenciable en x = 0.

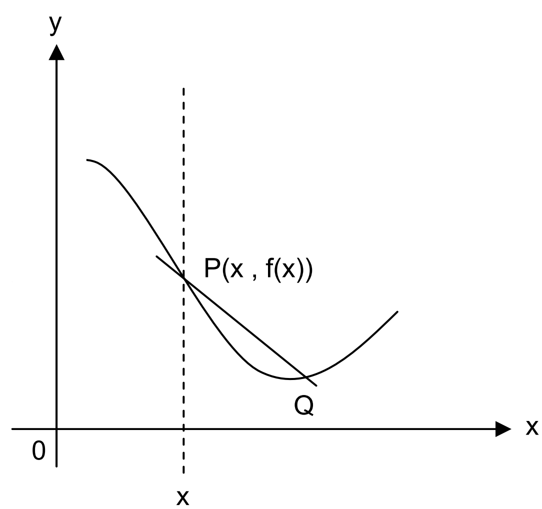
Si la pendiente de la recta secante que une P y Q tiende a a $+\infty$ ó $-\infty$ cuando Q tiende a P sobre la gráfica de f, entonces f no es diferenciable en x.

Desde el punto geométrico, tales puntos ocurren cuando las rectas secantes tienden a una posición límite vertical (ver gráfica 6 y 7)



Gráfica No. 6

a) la pendiente de la recta tiende a $+\infty$ cuando $Q \to P$



Gráfica No. 7

b) la pendiente de la recta secante tiende a $-\infty$ cuando $Q \to P$

El cálculo diferencial es el estudio del cambio que ocurre en una cantidad, cuando ocurren variaciones en otras cantidades de las cuales depende la cantidad original.

Los ejemplos siguientes muestran tales situaciones.

1) El cambio en el corte total de operación de una planta que resultan de cada unidad adicional producida.

2) El cambio en la demanda de cierto producto que resulta de un incremento en el precio.

3) El cambio en el producto nacional bruto de una país con cada año que pasa.

Sea x una variable con un primer valor x_1 y un segundo valor x_2. Entonces es el cambio, de valor x; es $x_2 - x_1$ y se denomina el incremento de cualquier variable.

Δx = $x_2 - x_1$ denota el cambio de la variable *x*

Δp = $p_2 - p_1$ índica el cambio de variable *p*

Δq = $q_2 - q_1$ denota el cambio de la variable *q*.

Sea y = f(x) una variable que depende de x. Cuando x tiende al valor x_1 , y tiende el valor $y_1 = f(x)$ De manera inicial, cuando $x = x_2$ y tiende el valor $y_2 = f(x_2)$
Así el incremento de y es

$$y_2 - y_1 = y_2 - y_1$$

$$= f(x_2) - f(x_1)$$

Ejemplo. El volumen de ventas de gasolina de cierta estación de servicio depende del precio del litro. Si p en el precio por el litro en centavos, se encuentra que el volumen de venta (en litros por día) esta dado por:

q = 500 (150 – p)

Calcula el incremento en el volumen de ventas que corresponde a un incremento en el precio de 120 c a 130 c por litro.

Solución. Aquí p, es la variable independiente y q la función de p. El primer valor de *p* es: p_1 = 120 y el segundo valor es p_2 = 130. El incremento de p es:

$$p_2 - p_1 = p_2 - p_1 = 130 - 120 = 10$$

Los valores correspondientes de q son los siguientes:

$$q_1 = 500\ (\ 150 - p_1\ ) = 500\ (150 - 120\ ) = 15,\ 000$$

$$q_2 = 500\ (150 - p_2\ ) = 500\ \ (150 - 130\ ) = \ 10,\ 000$$

En consecuencia, el incremento de q esta dado por:

$$p_2 - p_1 = q_2 - q_1 \ = \ 10{,}000 - 15{,}000 \ = \ -5000$$

El incremento de q mide el incremento en q y el hecho de que sea negativo significa que q en realidad decrece. El volumen de ventas decrece en 5, 000 litros por día si el precio se incrementa de 120c a 130c.

Resolviendo la ecuación $\Delta x = x_2 - x_1$ para x_2 si $\Delta x = h$, entonces tenemos $x_2 = x_1 + h$. Usando este valor de x_2 en la definición de Δy, obtenemos,

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x+h) - f(x)$$

En forma alternativa, dado que f (x) = y_1 podemos escribir:

$$y + y_2 - y_1 = f(x+h)$$

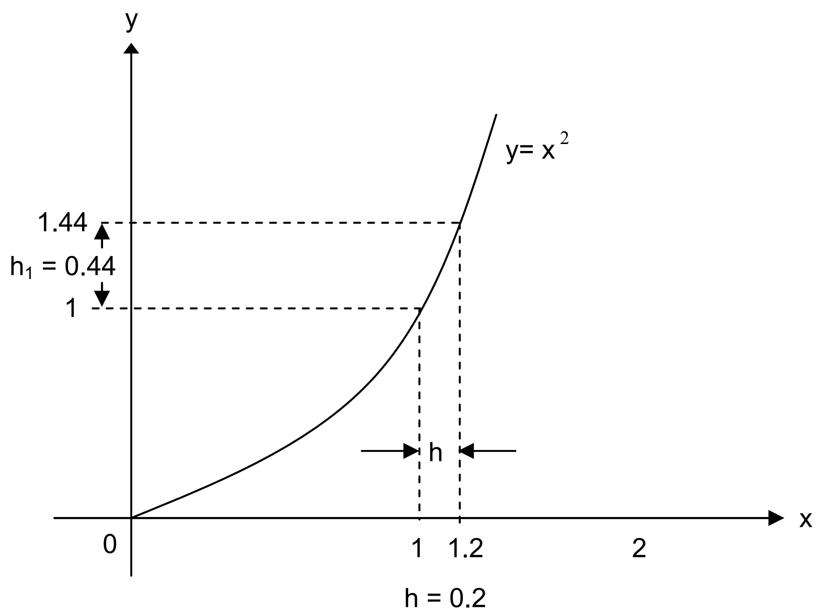
Ejemplo. Dado f (x) = x^2 calcula el incremento $y_2 - y_1$, si x = 1 y h = 0. 2

Solución. sustituyendo los valores de x y Δx en la fórmula de $\Delta y1$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\Delta y = y_2 - y_1 &= f(x+h)^2 - f(x)^2 \\
&= f(1+0.2)^2 - f(1)^2 \\
&= f\ (1.2)^2 - f\ (1)^2 \\
&= (1.2)^2 - (1)^2 = 1.44 - 1 \\
\Delta y = y_2 - y_1 &= 0.44
\end{aligned}$$

Observemos que un cambio de 0.2 en el valor de x da como resultado un cambio en “y” de 0.44.

Observemos la gráfica.



Gráfica No.8

Ejemplo.

En el caso de la función y = x^2, determina cuando x = 1 para cualquier incremento $x_1 - x$. de x.

$$
\begin{aligned}
y_2 - y_1 &= f(x+h) - f(x) \\
&= f(1+h) - f(1) \\
&= (1+h)^2 - (1)^2 \\
&= 1 + 2h + (h)^2 - 1 \\
&= 1 - 1 + 2h + (h)^2 \\
&= 2h + (h)^2
\end{aligned}
$$

Como en la expresión de $y_2 - y_1$ el ejemplo es valido para todos los incrementos h, entonces podemos resolverlo sustituyendo h = 0.2 quedando el siguiente resultado:

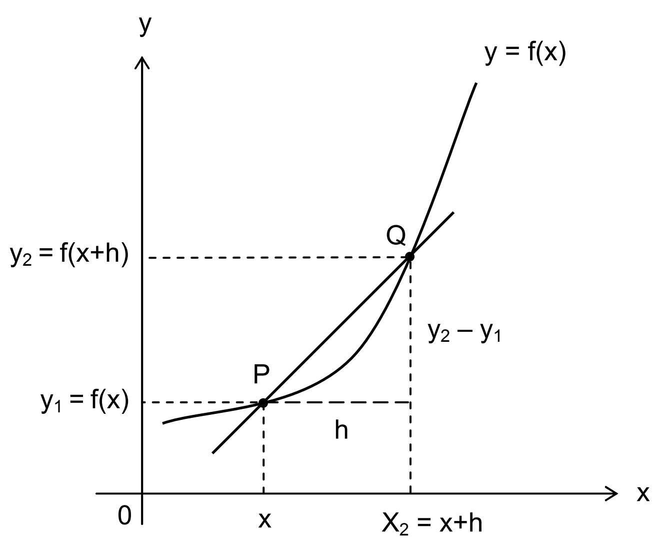
$$y_2 - y_1 = 2(0.2) + (0.2)^2 = 0.4 + 0.04 = 0.44 \quad \text{Como el anterior.}$$

DEFINICIÓN:
La tasa de cambio de una función f sobre un intervalo de x a x + h se define por la razón $y_2 - y_1 / h$, por lo tanto, la tasa de cambio promedio de y con respecto a x es:

$$\boxed{\frac{y_2 - y_1}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

OBSERVACIÓN: Es necesario que el intervalo de x a x+h pertenezca al dominio de f. gráficamente. Si P en un punto (x , f(x)) y Q en el punto (x+ h), f (x+h) sobre la gráfica de y = f (x), entonces el intervalo $y_2 - y_1$ = f (x + h) – f(x) en la elevación de la h en el recorrido de P a Q. Por definición de pendiente, decimos que $y_2 - y_1 / h$ es la pendiente del segmento rectilíneo PQ. Así que, la tasa de cambio promedio de "y" con respecto a "x" es igual a la pendiente de la recta PQ que pasa por los puntos P y Q sobre la gráfica de y = f(x)

Ver la figura para mayor comprensión; estos puntos corresponden a los valores "x" y "x+h" de la variable independiente.



Gráfica No.9

1.1.2 NOTACIÓN DE LA DERIVADA.

Es conveniente recordar que para denotar la derivada de una función y con una variable independiente x se utilizan las siguientes notaciones y simbolizaciones. Si se tiene y = f(x), la función derivada se simboliza por $\mathbf{D_x y}$, que se lee: la derivada de y respecto de **x**. **NOTACIÓN DE CAUCHY**. Si la función es y = f (x) la función derivada se representa por **y'** o por **f' (x) NOTACIÓN DE LAGRANGE**. La notación americana de la derivada de la función y = f (x) es:

$$\frac{dy}{dx} \text{ ó } \frac{df(x)}{dx}$$

Resumiendo las tres notaciones anteriores la derivada de una función y = f(x) puede escribirse:

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{y_2 - y_1}{h} = f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}}$$

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

Hasta el momento hemos aprendido que la recta que mejor se aproxima a una curva cerca del punto P es la tangente, a través de ese punto, más precisamente, la recta tangente a una curva en P es la posición de la recta tangente que pasa por dos puntos, conforme uno de los puntos se aproxima al otro a lo largo de la curva.

La pendiente *m* de la recta tangente a la curva y = f (x) está dada por:

$$\lim_{h \to 0} \frac{y_2 - y_1}{h} = f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}$$

1.2 TÉCNICAS DE LA DERIVACIÓN.

1.2.1 DERIVACIÓN DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

Generalmente la derivación se lleva acabo aplicando fórmulas obtenidas mediante la regla general de la derivación y que calcularemos a continuación, de estas podemos derivar las funciones algebraicas, trascendentales, sucesivas y combinadas.

1) *DERIVADA DE UNA CONSTANTE*.

Emplearemos el método de los cuatro pasos.

Si y = f (x) = c siendo c una constante

a) Evaluamos f en x+h, al incrementar x, la constante no cambia y, por lo tanto tampoco cambia y, entonces f (x+h) = c.
b) Restamos f(x).
   f (x+h) – f(x) = c – c = 0
c) Dividimos por h.
   $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{0}{h} = 0$
d) Obtenemos el límite cuando $h \to 0$
   $\lim_{h\to 0} 0 = 0$

Resumiendo.

Si y = c entonces y’ = 0	La derivada de una constante es igual a cero

Ejemplo.

La derivada de y = 4, es y’ = 0

La derivada de y = 5/7, es y’ = 0

La derivada de y = 2, es y’ = 0

Si y = 8, entonces y’ = 0

Si y = –2/3, entonces y’ = 0

2) *DERIVADA DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE.(FUNCIÓN IDENTICA O IDENTIDAD)*

Sea y = f(x) = x   siguiendo la regla general o de los cuatro pasos:

a) $y + y_2 - y_1 = x + h$

b) $y_2 - y_1 = h$

c) $y_2 - y_1 / h = h / h = 1$

La derivada de la variable independiente o con respecto a ella misma, es igual la unidad

Entonces:

d) $\lim_{h\to 0} \frac{y_2 - y_1}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$

Si   y = x   entonces   y´ = 1

La derivada de la variable independiente o con respecto a ella misma, es igual la unidad

3) *DERIVADA DEL PRODUCTO DE UNA CONSTANTE POR LA VARIABLE INDEPENDIENTE.*

Sea la función y = cx, por ejemplo y = 5x

Entonces la derivada de y = 5x, es y’ = 5

Si y = 5x /3, entonces y’ = 5/3

Si   y = cx   entonces   y´ = c

La derivada del producto de una constante por la variable independiente es igual a la constante

Por regla general:

a) $y + y_2 - y_1 = c(x + h)$

b) $y_2 - y_1 = cx + ch - cx = ch$

c) $\frac{y_2 - y_1}{h} = \frac{ch}{h} = c$

d) $\lim_{h\to 0} \frac{y_2 - y_1}{h} = \lim_{h\to 0} c = c$

4) *LA DERIVADA DE SUMA DE FUNCIONES*

Si $y = u + v + w$ en donde $y = f(x)$, $u = f(x)$, $v = f(x)$, $w = f(x)$

Entonces $y' = u' + v' + w'$, Siempre que u, v, w sean diferenciables

Ejemplo.

Si $y = (3x^2 + 5x)$, entonces $y' \quad (3x^2 + 5x) = y'(3x^2) + y'(5x) = 6x + 5$

$y' = u' + v' + w'$	La derivada de la suma algebraica de un número finito de funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Empleando la forma general comprueba la fórmula para la derivada de la suma de las funciones,

5) *DERIVADA DE PRODUCTOS Y COCIENTES.*

En esta sección, enfocaremos los dos más importantes teoremas que representan técnicas útiles cuando se requiere derivar funciones complicadas.

TEOREMA 1 REGLA DEL PRODUCTO

Si u(x) y v(x) son dos funciones de x diferenciables, entonces la derivada de su producto es:

$(uv)' = u v' + u' v$	La derivada del producto de dos funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda más la segunda función por la derivada de la primera.

Ejemplo. Calcula y' si y = $(5x^2 - 3x)(2x^3 + 8x + 7)$
Solución.
La función dada puede escribirse como un producto y = u v
Si hacemos $u = 5x^2 - 3x \quad y \quad v = 2x^3 + 8x + 7$
Aplicando la regla del producto y sustituyendo en la definición del teorema 1 obtenemos,

$$y' = uv' + vu'$$
$$y' = (5x^2 - 3x)(6x^2 + 8) + (2x^3 + 8x + 7)(10x - 3)$$

Desarrollando y simplificando operaciones obtenemos,

$$y' = 30x^4 - 18x^3 - 24x^3 + 40x^2 - 24x + 20x^4 - 6x^3 + 80x^2 - 24x + 70x - 21$$
$$y' = 50x^4 - 24x^3 + 120x^2 + 22x - 21$$

Si observamos el ejemplo anterior, en realidad no necesitamos la regla del producto a fin de calcular la derivada de la función dada. Se puede calcular la primera derivada, eliminando los productos del lado derecho y expresando a *y* como una suma de potencias de x.

$y = (5x^2 – 3x)(2x^3 + 8x + 7)$

$y = 10x^5 – 6x^4 + 40x^3 – 24x^2 + 35x^2 – 21x$

$y' = 10(5x^4) – 6(4x^3) + 40(3x^2) – 24(2x) + 35(2x) – 21(1)$

$y' = 50x^4 – 24x^3 + 120x^2 + 22x – 21$

Ejemplo.
Dada f(t) = $(2\sqrt{t} + 1)(t^2 + 3)$, determine f´ (t) aplicando la regla del producto.

u = $2\,t^{1/2} + 1 \quad y \quad v = t^2 + 3$

$$f'(t) = (2t^{1/2} + 1)\frac{d}{dt}(t^2 + 3) + (t^2 + 3)\frac{d}{dt}(2t^{1/2} + 1)$$

$$= (2t^{1/2})(2t) + (t^2 + 3)[(2t)(t^{-1/2}/2)]$$

$$= 4t^{3/2} + 2t + t^{3/2} + 3t^{-1/2} = 5t^{3/2} + 2t + \frac{3}{\sqrt{t}}$$

La ecuación de demanda del precio p expresa que una cantidad x de cierto artículo puede venderse durante cierto periodo. En general podemos escribir p= f (x). El ingreso originado en la venta de este número de artículos es R= x p.

Donde R esta expresado como el producto de dos cantidades, el ingreso marginal, que es la derivada de R con respecto a x, puede obtenerse mediante la regla del producto.

$$\frac{dR}{dx} = p\frac{d}{dx}(x) + x\frac{d}{dx}(p)$$

$$= p(1) + x\frac{dp}{dx} = p + x\frac{dp}{dx}$$

Ejemplo. Ingreso marginal

Si la ecuación de demanda es lineal, tenemos p = a – bx en donde a y b son dos constantes positivas.
Así, dp/dx = - b y el ingreso marginal es

dR/dx = p + x dp/dx; dR/dx = a – bx + x (-b) = a – 2bx.

Observemos que el ingreso marginal en este ejemplo puede de hecho calcularse directamente R = xp = x (a – bx) = ax – bx ^{2}
R' (x) = a – 2bx.

Algunas veces es útil hallar el ingreso marginal con respecto al precio. Considerando el ingreso R como una función del precio p; el ingreso marginal con respecto al precio se define con la derivada de dR/dp

Representa el incremento en el ingreso por cada unidad de incremento en el precio por artículo cuando el precio sufre un pequeño incremento.

Dado que R = xp, u cumple con la regla del producto.

$$\frac{dR}{dp} = x\frac{d}{dx}(p) + p\frac{d}{dx}(x) = \frac{dR}{dp}x + p\frac{dx}{dp}$$

La derivada de dx /dp que ocurre en esta ecuación a menudo se denomina la *derivada marginal con respecto al precio.* Significa el incremento en la demanda por unidad de incremento en el precio por artículo cuando el precio sufre de un pequeño incremento.

Ejemplo. Considerando otra vez la ecuación de la demanda lineal p = a – bx, se tiene que x = (a/b) – (p/b) y así dx/dp = –1/b, por lo tanto, el ingreso marginal con respecto al precio es:

$$\frac{dR}{dp} = x + p\frac{dx}{dp}$$

$$= \frac{a}{b} - \frac{p}{b} + p(\frac{1}{b})$$

$$= \frac{a}{b} - \frac{p}{b} - \frac{p}{b} = \frac{a}{b} - \frac{2p}{b}$$

Una vez más, podríamos haber calculado dR/dp directamente derivando la función: R = xp = (ap – p^2) / b

TEOREMA 2. REGLA DEL COCIENTE.

Si u (x) y v(x) son dos funciones diferenciables de x, se tiene que:

$$\boxed{(\frac{u}{v}) = \frac{vu' - uv'}{v^2}}$$

La derivada del cociente de dos funciones es igual al denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador todo dividido entre el cuadrado del denominador.

Ejemplo. Calcula y' $= \frac{x^2+1}{x^3+4}$

Aplicando la regla del cociente tenemos

u = x^2 + 1 y v = x^3 + 4

$$y' = \frac{(x^3+4)\ u'(x^2+1) - (x^2+1)\ v'(x^3+4)}{(x^3+4)^2}$$

$$y' = \frac{(x^3+4)(2x) - (x^2+1)(3x^2)}{x^6+8x^3+16} = \frac{2x^4+8x-(3x^4+3x^2)}{x^6+8x^3+16}$$

$$y' = \frac{-x^4-3x^2+8x}{x^6+8x^3+16} = \frac{-x^4-3x^2+8x}{(x^3+4)^2}$$

Ejemplo. Calcula y’ si $y = \frac{x+1}{x+3}$

u = (x + 1)   y   v = (x + 3)

$$y' = \frac{(x+3)\ u'(x+1)\ -\ (x+1)\ v'(x+3)}{(x+3)^2}$$

$$y' = \frac{(x+3)(1)-(x+1)(1)}{(x+3)^2} = \frac{x+3-x-1}{(x+3)^2}$$

$$y' = \frac{2}{(x+3)^2}$$

Ejemplo. Calcula y´ si $y = \frac{3}{2x+7}$

u = 3   y   v = (2x + 7)

$$y' = \frac{(2x+7)\ u'(3)\ -\ (3)\ v'(2x+7)}{(2x+7)^2} = \frac{-6}{(2x+7)^2}$$

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

1. Usando la regla del producto calcula las derivadas de las funciones siguientes con respecto a la variable independiente respectiva.

a) $y = (x + 1)(x^3 + 3)$

b) $u = (7x + 1)(2 - 3x)$

c) $f(x) = (x^2 - 5x + 1)(2x + 3)$

d) $y = (x^3 + 6x^2)(x^2 - 1)$

e) $u = (x^2 + 7x)(x^2 + 3x + 1)$

f) $g(x) = (x^2 + 1)(x + 1)^2$

g) $f(x) = (3x + 7)(x - 1)^2$

h) $u = \left(\frac{y+3}{y}\right)(y^2 - 5)$

i) $g(t) = \left(\frac{t+1}{t}\right)\left(\frac{5t^2 - 1}{t^2}\right)$

j) $f(x) = (2x + 1)(3x^2 + 1)(x^3 + 3)$

2. Usando la regla del cociente calcular las derivadas de las funciones con respecto a la variable independiente respectiva.

a) f(x)= $\frac{t^2 - 7t}{t - 5}$

b) t= $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

c) f (t) = $\frac{5t}{2 - 3t}$

d) f(x) = $\frac{x + 2}{x - 1}$

e) y = $\frac{u^2 - u + 1}{u^2 + u + 1}$

f) y = $\frac{1}{x^2 + 1}$

g) y = $\frac{u}{u + 1}$

h) g(x)= $\frac{3 - x}{x^2 - 3}$

i) x = $\frac{u + 1}{u - 1}$

j) y = $\frac{1}{(t + 1)^2}$

6) *DERIVADA DE UNA CONSTANTE POR UNA FUNCIÓN*.

Si y = c u

Entonces y = $7x^2$ tiene como derivada la expresión:

y' $(7x^2) = 7(y'x^2) = 7(2x) = 14x$

Si y = c u Entonces y' = c u'	La derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función

Ejemplos:

$$y = \frac{3}{5}x$$

$$y' = \frac{3}{5}\ y'(x)$$

$$y' = \frac{3}{5}\ (1) = \frac{3}{5}$$

$$y = \frac{5}{2}x$$

$$y' = \frac{5}{2}\ y'(x)$$

$$y' = \frac{5}{2}\ (1) = \frac{5}{2}$$

7) *DERIVADA DE LA POTENCIA DE UNA FUNCIÓN DE LA FORMA $y = x^n$*

Sea $y = x^n$ donde y = f (x)
u = x
n = No. entero positivo o negativo.

Si $y = x^3$ su derivada es $y' = 3x^2$

$\boxed{\text{Si } y = x^n \text{ Entonces } y' = n\,x^{n-1}}$

Cuando el exponente es negativo:

$\boxed{\text{Si } y = x^{-n} \text{ Entonces } y' = -nx^{-n-1}}$

La derivada de la función potencial de x siendo su exponente un número entero positivo o negativo, es igual al producto del exponente n por la potencia disminuida en la unidad

Ejemplos.

Derivar:

$y = x^{-6}$

$y' = -6\,x^{-6-1}$

$y' = -6\,x^{-7} = \dfrac{-6}{x^7}$

$y = \dfrac{3}{x^2}$

$y' = 3x^{-2} = -2\,(3x^{-2-1})$

$y' = -6x^{-3}) = \dfrac{-6}{x^3}$

8) DERIVADA DE LA POTENCIA DE FUNCIONES

Si $y = u^n$ Entonces $y = (3x+2)^5$ tiene como derivada:

$y' = 5\,(3x + 2)^{5-1}\;\; y'\,(3x + 2)$

$y' = 5(3x+2)^4(3) = 15(3x+2)^4$

$$\boxed{y'(u)^n = nu^{n-1}u'}$$

La derivada de la potencia de una función es igual al producto del exponente por la función elevada a un grado menos y por la derivada de la función

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Derivar las siguientes funciones.

a) $y = x^3$

b) $y = x^4 - 2x^2 + 5x + 7$

c) $y = (3 - x)\,(2 + x)$

d) $y = (x^2 + 1)^2$

9) DERIVADA DE UNA FUNCIÓN ENTRE UNA CONSTANTE

Sea $y = \frac{u}{c}$ en donde c es una constante

Ejemplo. Derivar $y = \frac{3x+2}{8}$ donde u = 3x + 2 y u' = 3

Entonces $y' = \frac{3}{8}$

$y'\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{u'}{c}$	La derivada de la función entre una constante es igual a la derivada de u entre la constante

Esta fórmula también podemos citarla como un caso particular de la derivada de una constante por una función.

10) DERIVADA DE LA RAIZ CUADRADA DE UNA FUNCIÓN.

Derivar. $y = \sqrt{3x-2}$ donde u = 3x – 2 y u' = 3

Entonces $y' = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$

Porque si $y = \sqrt{x}$ entonces $y = x^{1/2}$ y su derivada es $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Si el radicando (lo que está dentro del radical) es una variable u, entonces la función es de la forma $y = \sqrt{u}$ y su derivada es:

$y'\sqrt{u} = \left[\frac{u'}{2\sqrt{u}}\right]$	La derivada de la raíz cuadrada de una variable, es la derivada de la variable entre dos veces la raíz de la variable

Ejemplo.

Derivar la función $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$, utilizando el exponente fraccionario y el exponente negativo.

$$y = x^{1/2} + \frac{1}{x^{1/2}} = x^{1/2} + x^{-1/2}$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(x^{1/2-1}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^{-\frac{1}{2}-1}\right) = \frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{1}{2}x^{-3/2}$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Obtén la derivada de las siguientes funciones, aplicando la fórmula correspondiente

a) $f(x) = 7x$

b) $f(x) = bx + c$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 8}{3}$

d) $f(x) = 3\,(x^3 - x^2)$

e) $f(x) = (x^2 + 1)^2$

f) $f(x) = (ax)^4$

g) $f(x) = (3x + 2)^5$

h) $f(x) = \frac{3}{x^{-4}}$

i) $f(x) = 3x^2 - 1$

j) $f(x) = \frac{3x^2}{x - 1}$

k) $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 8)^3}$

l) $f(x) = x$

m) $f(x) = 7x^4$

n) $f(x) = 9x^3 - x^5$

o) $f(x) = x^3$

p) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$

q) $f(x) = \frac{x}{2x + 7}$

r) $f(x) = \sqrt{2x - 1}$

1.2.2 REGLA DE LA CADENA

Las reglas de la derivación presentadas en las secciones anteriores se pueden usar solamente para sumar, restar productos y cocientes de expresiones de la forma x donde n es un número entero .

$$(x^2+1)^3$$

Es claro que Dx $(x^2+1)^3$

Si cambiamos la forma de la expresión, entonces;

$y=(x^2+1)^3=x^6+3x^4+3x^2+1$ y $D_xy = 6x^5 + 12x^3 + 6x$,

factorizando $D_xy = 6x\,(x^2 + 1)^2$ Por lo tanto $Dxy\,(x^2 + 1)^3 = 6x\,(x^2 + 1)^2$

Este desarrollo es muy complicado para potencias mayores como por ejemplo $(x^2+1)^{10}$ entonces es conveniente tener métodos más sencillos para calcular la derivada.

El que se usa en este caso parte de expresar una función de x , recordando que si f y g son funciones tales que:

y = f (u) (1) u = g(x) (2)

Ahora bien si g (x) esta en el dominio de f entonces la podemos escribir y = f(u) = f [g(x)] es decir, y es una función de x, esto último es la función compuesta f ó g, podemos notar que la expresión

$y=(x^2+1)^3$ puede expresarse de la manera siguiente.

$y = u^3$ y $u = x^2 + 1$

Si se pudiera encontrar una regla general para derivar f [g(x)], entonces se podría aplicar a y = $(x^2+1)^3$ como caso especial y también a cualquier expresión de la forma y = [f(x)^n] donde n debe ser un número entero.

Para dar una idea de tipo de regla esperada regresemos a las ecuaciones 1 y 2 y = f(u), u = g(x) queremos encontrar una fórmula para la derivada dy/dx de la función compuesta dada por y = f [g(x)] . Si f y g son derivables, entonces utilizando la notación de las diferenciables tenemos

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \qquad y \qquad \frac{du}{dx} = g'(x)$$

Considerando como producto $\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

y tratando las derivadas como cocientes diferenciables llegamos a la siguiente regla.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot g'(x)$$

notamos que esta proporciona la derivada correcta de y = $(x^2+1)^3$ escribiendo $y = u^3$ y $u = x^2+1$ y utilizando la regla tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = (3u^2)(2x) = 6x(x^2+1)^2$$

No se ha demostrado la citada regla, se ha planteado el siguiente teorema en la que se supone que las variables se eligen de manera que la función compuesta f ó g, esta definida y que si g tiene la derivada en x entonces f tiene derivada en g(x).

REGLA DE LA CADENA.

Si y = f(u), u = g(x), y las derivadas dy/du y du/dx existen ambas, entonces la función compuesta definida por y = f [g(x)] tiene una derivada dada por:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) = f'[g(x)]\, g'(x)}$$

Ejemplos.

Sea $y = (3x^2 - 7x + 1)^5$ encontrar dy/dx utilizando la regla de la cadena.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (5u^4)(6x-7) = 5(3x^2 - 7x + 1)^4 (6x - 7)$$

Si $y = \sqrt{4 - x^2}$ entonces $y = (4 - x^2)^{1/2}$, $y = u^{1/2}$ $u = 4 - x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} u^{-1/2} (-2x) = -x(4 - x^2)^{-1/2} = \frac{-x}{(4 - x^2)^{1/2}} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Usando la regla de la cadena, calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $g(x) = (x^2 + 1)(x + 1)^2$

b) $f(x) = (3x + 7)(x - 1)2$

c) $y = \dfrac{1}{(t+1)^2}$

d) $y = \sqrt{x^3 + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^3 + 4}}$

1.2.3 DERIVADAS SUCESIVAS O DE ORDEN SUPERIOR

Si el movimiento de un objeto lo describimos por la ecuación $S = \frac{1}{3}t^3 - t^2$ para el tiempo en un intervalo de (0,10), si t esta dada en segundos y S en metros.

Calcula la distancia recorrida, la velocidad y la aceleración para, a) t = 6 seg, b) t = 3seg, c) t = 2 seg, d) t = 1 seg.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Contesta las siguientes preguntas con base al problema del movimiento de un objeto.

¿Puedes resolverlo aplicando las derivadas sucesivas?

____

¿Qué calcularías primero, la velocidad, distancia, o aceleración?

____

¿La primera derivada de f (x) que representa?

____

¿Si S = f(t) que representa esta función?

____

La solución del problema anterior, es la siguiente.

Si lo podemos resolver utilizando derivada de orden superior o sucesivas.
Se calcula primero la distancia, después la velocidad y por último la aceleración.
La derivada f ’(x) nos representa, razón de cambio f(x) con respecto a x.
S = f(t) nos representa el desplazamiento de algún móvil en línea recta.

a) Tenemos que calcular f (t), f `(t), f´´(t) siendo S = f(t)

$$S = f(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2$$

Para t = 6 seg.

Desplazamiento: $f(6) = \frac{1}{3}(6)^3 - (6)^2 = \frac{216}{3} - 36 = 72 - 36 = 36\,\text{mts}$

Velocidad (primera derivada): $f'(t) = t^2 - 2t$
$f'(6) = (6)^2 - 2(6) = 36 - 12 = 24$ m/seg

Aceleración (segunda derivada): $f''(t) = 2t - 2$

$$f''(6) = 2(6) - 2 = 12 - 2 = 10 \text{ m/seg}^2$$

Es decir en t = 6 segundos el móvil recorrió 36m con una velocidad de 24 m/seg y una aceleración de 10 m/seg.

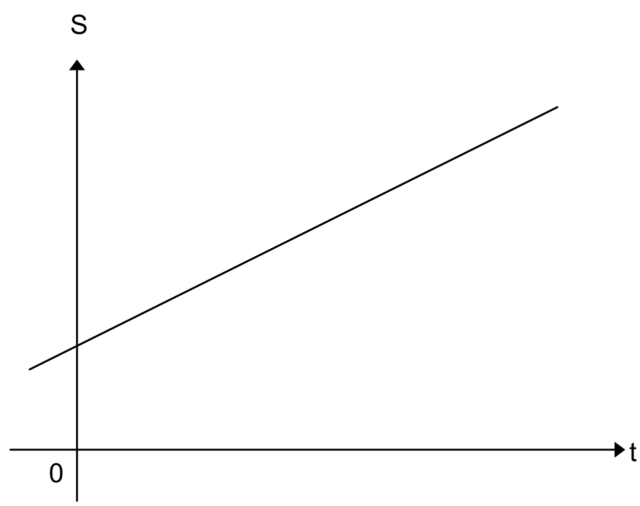
b) Debemos calcular f(3), f ‘ (3), f ’’(3)

$$f(3) = \frac{1}{3}(3)^3 - (2)^2 = \frac{27}{3} - 9 = 9 - 9 = 0 \text{ mts}$$

$$f'(3) = (3)^2 - 2(3) = 9 - 6 = 3 \text{ m/seg}$$
$$f''(3) = 2(3) - 2 = 6 - 2 = 4 \text{ m/seg}^2$$

En t = 3 seg el móvil recorrió cero m, (empezó retrocediendo y en t = 3 había avanzado los que había retrocedido. En t = 3 seg, su velocidad era de 3 m/seg y su aceleración de 4 m/seg.

Resuelve los incisos “c” y “d” ¿Qué observas? Por último observamos que si la gráfica de la función desplazamiento con respecto al tiempo tiene la forma:



(1) La velocidad es positiva y constante, lo que implica que la velocidad instantánea es la misma por cada instante y la aceleración es nula

¿Cuál es la gráfica para las otras funciones?

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Ejercicios de aplicación.

a) Sea $f(x) = x^4 - 2x^2 - \sqrt{x}$ calcula f ''' (x)

b) Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$ calcular $f^4(x)$ en x = 2

c) Sea $h(x) = \sqrt{24 - x^2}$ calcular f ''(4)

Para los ejercicios del inciso d) al i) toma en cuenta que una partícula se mueve según la ecuación.

$s = t^3 - 6t^2$, para t > 0 donde t esta en hrs. y *s* en km.

d) Calcula la aceleración media en [3,5]

e) Calcula la aceleración instantánea en t = 5

f) Calcula la aceleración instantánea en t = 1

g) ¿A que el valor "t" es igual a 0?

h) ¿En que intervalo la velocidad es positiva?

i) ¿En que intervalo la aceleración es positiva?

La velocidad de un móvil se define como la derivada de una función.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si el límite existe entonces la segunda derivada de f, será:

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Así como la primera derivada f' (x) representa la razón de cambio de f(x) con respecto a x, la segunda derivada nos da la razón de cambio f''(x) con respecto a (x).

Recordando que si S = f(t) es una función que representa el desplazamiento de algún móvil en la línea recta, entonces la velocidad instantánea v en t_1 es,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t_1 + h) - f(t)}{h} \quad \text{si el límite existe}$$

lo cual no es otra cosa que la derivada f'(t), es decir v =f'(t) o bien V (ds/dt) por lo tanto vez la razón de cambio de S = f(t) con respecto a t (o sea que la velocidad instantánea V es la razón de cambio del desplazamiento del móvil con respecto al tiempo. Así la segunda derivada f de t con respecto a t será la razón de cambio de la velocidad y se llama aceleración, entonces se tiene que:

Aceleración V' = $[f'(t)]' = \lim_{h \to 0} \frac{f''(t+h) - f''(t)}{h}$

Resumiendo tenemos que si el movimiento de un objeto esta descrito por *S* como función del tiempo, entonces *S* es una función real de variable dada *S* = f(t), la velocidad V del objeto estará dada por la función f '(t) o bien ds/dt (si f es la variable) y la aceleración "a" será la función V' = f ''(t);

En general la derivada de orden n se denota $f^{(n)} \quad o \quad bien \quad \frac{d^n y}{dx^n}$

Ejemplo.

Si f(x) = x^4 , entonces:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 \\ f''(x) &= 12x^2 \\ f^3(x) &= 24x \\ f^4(x) &= 24 \\ f^5(x) &= 0 \\ f^n(x) &= 0 \qquad \text{si n es entero y n > 5} \end{aligned}$$

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

1. Calcula f ' , f '' y f ''' de cada una de las siguientes funciones.

   a) $f(x) = 6x^3 - 4x^2 + x$

   b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 6$

   c) $f(x) = ax^3 + bx^2 - cx + d$

2. Encuentra la velocidad y la aceleración de un objeto cuya posición *S* en el tiempo t está dada por:

   a) $S = 16t^2 + 16t$

   b) $S = 4.9t^2 + 4t + 4$

1.2.4 DERIVADA DE FUNCIONES IMPLÍCITAS.

GENERALIDADES.- Las funciones se pueden expresar tanto en forma implícita como en forma explícita.

Ejemplo: La función $y = \sqrt{5 - x^2}$ esta expresada en forma explicita, la misma expresión en forma implícita queda $y^2 + x^2 = 5$.

Hemos estudiado las fórmulas para derivar las funciones explícitas, pero sucede a veces que debemos derivar una función implícita por que *no es posible o resulta complicado despejar la "y"* esto lo resolvemos con el método de derivación implícita que constituye una aplicación de la derivación de una función de funciones.

PROCEDIMIENTO PARA DERIVAR UNA FUNCIÓN IMPLICITA.

Derivamos término a término, tomando "y" como una función de "x", en la expresión resultante, despejamos dy/dx como lo hacemos en la ecuación.

En algunos casos retomamos las fórmulas.

a) y’ (uv) = uv’ +vu’	La derivada de un producto
b) $y' (u)^n = n(u)^{n-1} u'$	La derivada de una función elevada a un exponente entero positivo
c) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,u' - u\,v'}{v^2}$	La derivada de un cociente

y otras según lo estime el problema.

Ejemplo. Derivar la función implícita $x^2 + y^2 = 5$

Solución: derivamos término a término con respecto a x

$$y'(x^2) = 2x$$
$$y'(y^2) = 2y$$
$$y'(5) = 0$$

Sustituyendo

$y' (x^2 + y^2 - 5) = 2x + 2y\,y' - 0$
$= 2x + 2y(y')$. ecuación (1)

Despejamos $y' de. 1$

$2y\,y' = -2x \quad \therefore \quad y' = -\frac{x}{y}$

El ejercicio anterior lo podemos expresar en forma explícita y obtener su derivada.

Continuando con el ejemplo. Derivar

$$x^2 + y^2 = 5 \qquad y = \sqrt{5 - x^2} = (5 - x^2)^{1/2}$$

$$u = 5 - x^2 \qquad y' = \frac{1}{2}(5 - x^2)^{-1/2}(-2x)$$

$$u' = -2x \qquad y' = -\frac{2x}{2\sqrt{5 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{5 - x^2}}$$

Como $y = \sqrt{5 - x^2}$, entonces se sustituye en la derivada y se obtiene la expresión $y' = -\frac{x}{y}$

Ejemplo. Derivar $5x^2 - xy + y^2 = 0$

En este caso aunque quisiéramos no es posible dar la expresión en forma explícita por lo cual es necesario aplicar el procedimiento de la derivación implícita. Solución derivando término a término con respecto de x.

$$y'(5x^2) = 10x$$
$$y'(xy) = xy' + y$$
$$y'(y^2) = 2y(y')$$

Sustituyendo, tenemos: $y'(5x^2 - xy + y^2) = 10x - (xy' + y) + 2yy'$
$= 10x - xy' - y + 2y\,y'$

Despejamos a y': $-xy' + 2y\,y' = y - 10x$

$$y'(-x + 2y) = y - 10x \qquad y = \frac{y - 10x}{2y - x}$$

NOTA En general los resultados de los términos de las funciones implícitas incluyen a "x" y a "y" como en el ejemplo anterior.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Obtener la derivada de y con respecto a x en las siguientes funciones por el método de derivación implícita.

a) $.5x^2 + 2y^2 = 1$ sol. $y' = -\frac{5x}{2y}$ ó $y' = \frac{5x}{2\sqrt{\frac{1-5x^2}{2}}}$

b) $x^2y^2 - y^2 = x^2$ sol. $\frac{x - xy^2}{x^2y - y}$

c) $x^2 - 5y^2 = 3$ sol. $y' = \frac{x}{5y}$ ó $y' = \frac{x}{5\sqrt{\frac{x^2-3}{5}}}$

d) $5 - y^3 = x$ sol. $y' = -\frac{1}{3y^2}$ ó $y' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(5-x)^2}}$

e) $y^2 = 2px$ sol. $y' = \frac{p}{y}$ ó $y' = \frac{p}{\sqrt{2px}}$

f) $5xy - 1 = 0$ sol. $y' = -\frac{y}{x}$ ó $y' = -\frac{1}{5x^2}$

g) $x - 5y^2 = 3y$ sol. $\frac{1}{10y+3}$

h) $x^2 - xy + y^2 = 0$ sol. $y' = \frac{y-2x}{2y-x}$

i) $b^2x^2 - a^2y^2 = 3a^2b^2$ sol. $y' = \frac{b^2x}{a^2y}$

j) $x - 5y^2 = 2y$ sol. $y' = \frac{1}{10y+2}$

1.2.5 DERIVADA DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Antes de entrar al campo de logaritmos es necesario hacer un recordatorio:

a) Reglas fundamentales de los logaritmos de cualquier base

1. $\log_a A\,B = \log_a A + \log_a B$
2. $\log_a A/B = \log_a A - \log_a B$
3. $\log_a A^n = n \log_a A$
4. $\log_a \sqrt[a]{n} = \frac{\log_a A}{n}$

b) En las propiedades generales de los logaritmos, se indica , en todo sistema de logaritmos el logaritmo de base uno.

c) En ecuaciones exponenciales; toda ecuación que contiene a la incógnita como exponente se llama ecuación logarítmica.

Ejemplo. $\log 5^{(x-3)} + \log^{5x} = 2$

d) El numero “e”; se utiliza en las matemáticas para el estudio de diferentes fenómenos físicos, biológicos, económicos y sociales, es un numero irracional que se expresa e = 2.718..... es decir,

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e = 2.718.....$$

NOTACIÓN

$\log_e u$ = ln u = Lu para los naturales

log u = $\log_a u$ para los vulgares

e) DERIVADA DE $\log_a u$

Sea y = $\log_a u$ en donde u = f(x)
como y > u, están en función de x, cuando se incrementa,
entonces $y + y_2 - y_1, .u + u_2 - u_1$ donde:

I. $y + y_2 - y_1 = \log_a (u + u_2 - u_1)$

II. $y_2 - y_1 = \log_a (u + u_2 - u_1) - \log_a u$

Si observamos es de acuerdo a la regla fundamental de logaritmos según el de a/2

$$\log_a A/B = \log_a A - \log_a B$$

Hacemos $A = (u + u_2 - u_1)$ B = u

de donde $y_2 - y_1 = \log_a \left[\frac{(u + u_2 - u_1)}{u}\right]$

al segundo miembro lo multiplicaremos por $\frac{u_2 - u_1}{u}$ y lo dividiremos entre, $\frac{u_2 - u_1}{u}$

recordando que para dividir podemos multiplicar por el recíproco del divisor,

$$y_2 - y_1 = \log_a \left[\frac{(u + u_2 - u_1)}{u}\right] \cdot \frac{u_2 - u_1}{u} \div \frac{u_2 - u_1}{u}$$

III. $$\frac{y_2 - y_1}{h} = \frac{u}{u_2 - u_1} \log_a \left[\frac{(u + u_2 - u_1)}{u}\right] \cdot \frac{u_2 - u_1}{u h}$$

de acuerdo a la regla de los logaritmos

$\log_a A^n = n \log_a A$

sabemos que $n \log_a A = \log_a A^n$

$$\frac{y_2 - y_1}{h} = \frac{u}{u_2 - u_1} \log_a \left[\frac{(u + u_2 - u_1)}{u}\right] \cdot \frac{u_2 - u_1}{u\,h} = \log_a \left[\frac{(u + u_2 - u_1)}{u}\right]^{\frac{u}{u_2 - u_1}} \cdot \frac{u_2 - u_1}{u\,h}$$

descomponemos: $\dfrac{u_2 - u_1}{u\,h}$

$$\frac{y_2 - y_1}{h} = \log_a \left[\frac{(u + u_2 - u_1)}{u}\right]^{\frac{u}{u_2 - u_1}} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{u_2 - u_1}{h}$$

como límite

$$\lim_{u_2 - u_1 \to 0} \left[\frac{(u + u_2 - u_1)}{u}\right]^{\frac{u}{u_2 - u_1}} = e$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{y_2 - y_1}{h} = \log_a e \cdot \frac{1}{u} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{u_2 - u_1}{h}$$

de donde $y' = \dfrac{\log_a e}{u}\, u'$

$$\boxed{y' \log_a u = \frac{\log_a e}{u}\, u'} \qquad \text{ecuación (1)}$$

Ejemplo. Derivar $y = \log \dfrac{3}{x}$

$y = \log 3x^{-1}$

$u = 3x^{-1}$

$u' = -1(3)(x)^{-2} = -\dfrac{3}{x^2}$

$y' = \dfrac{\log e}{3x^{-1}}\left(-\dfrac{3}{x^2}\right)$

$y' = -\dfrac{3x \log e}{3x^2} \quad \therefore \quad y' = -\dfrac{\log e}{x}$

f) *DERIVADA DE* ln u

$\log_e u$ se puede expresar como: $\log_e u$ = ln u = Lu

Sea = $\log_e u$

En donde u = f(x) de la fórmula (1)

$y' \log_a u = \frac{\log_a e}{u} u'$ si hacemos a = e, queda:

$y' \log_e u = \frac{\log_a e}{u} u'$

como en todo sistema de logaritmos, el logaritmo de la base es un 1

$\log_a .e = 1$ de donde:

$$\boxed{y' \log_e u = y' \ln = \frac{1}{u} \cdot u'}$$ ecuación (2)

Ejemplo. Derivar y = ln (ax + 3)

Donde u = ax + 3 y aplicando la formula u´= a

$y'(\ln u) = \frac{1}{u} u'$ Sustituyendo valores

$$= \frac{1}{ax+3} . \frac{a}{1}$$

$$y' = \frac{a}{ax+3}$$

Derivar $y = \ln(\ln x)$

Aplicando la formula u = ln x y u' = $\frac{1}{x}$

$$y'(\ln(\ln x)) = \frac{1}{\ln x} . \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x}$$

g) *DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL* a^u

sea $y = a^u$ en donde $u = f(x)$

A la exponencial se le aplica logaritmos a los dos miembros de la ecuación, $\ln y = u \ln a$ y se deriva en forma implícita, desarrollamos el primer miembro con la fórmula (2) y el segundo miembro con la derivada de un producto.

$$\frac{y'}{y} = u\left(\frac{1}{a}\right) + \ln a \; u'$$

$$\frac{y'}{y} = \ln a \; u' \qquad \text{despejamos} \qquad y' = y \ln a \; u'$$

Como $y = a^u$. Entonces:

$$\boxed{y'(a^u) = a^u \ln a \; u'} \qquad \text{ecuación (3)}$$

Ejemplo. Derivar $y = 10^{(x^2+5x-6)}$

$$u = x^2 + 5x - 6 \qquad u' = 2x + 5$$

$$y' = 10^{(x^2+5x-6)}(\ln 10)(2x+5)$$

$$y' = (2x + 5)\; 10^{(x^2-5x-6)} \ln 10$$

h) *DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL* e^u

Sea $y = e^u$ en donde $u = f(x)$ de la ecuación (3)

$y'(a^u) = a^u \ln a \; u'$ hacemos $a = e$ queda

$y'(e^u) = e^u \ln e \; u'$

Como en todo sistema de logaritmos, el logaritmo de la base es uno, $\ln e = 1$ Entonces:

$$\boxed{y'(e^u) = e^u \; u'} \qquad \text{ecuación (4)}$$

Ejemplo. Derivar $y = e^{x^3}$ donde $u = x^3$

Por lo tanto aplicando la formula resulta $y' = e^{x^3}(3x^2) = 3x^2 e^{x^3}$

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Con base a los conceptos de funciones logarítmicas y exponenciales, deriva las siguientes funciones para reafirmar tu conocimiento:

a) $y = \ln(3x + b)$ sol. $y' = \dfrac{6}{3x + b}$

b) $y = \ln(3x^2 + b)$ sol. $y' = \dfrac{6x}{3x^2 + b}$

c) $y = \ln(ax + 2)$ sol. $y' = \dfrac{a}{ax + 2}$

d) $y = \ln(2x^n)$ sol. $y' = \dfrac{n}{x}$

e) $y = \ln(2x^3 - 3x^2 + 5)$ sol. $y' = \dfrac{6x(x-1)}{2x^3 - 3x^2 + 5}$

f) $y = \log\dfrac{3}{x}$ sol. $y' = \dfrac{\log e}{x}$

g) $y = \ln\dfrac{3}{x}$ sol. $y' = \dfrac{6}{x(3 + x^2)}$

h) $y = \ln\sqrt{3 - 2x^2}$ sol. $y' = \dfrac{-2x}{3 - 2x^2}$

i) $y = 2x \ln x$ sol. $y' = 2 + 2 \ln x$

j) $y = e^{2x}$ sol. $y' = 2 e^{2x}$

1.2.6 DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DIRECTAS Y RECÍPROCAS

a) *DERIVADA DE LA FUNCIÓN SENO*

Derivar:

$y = \text{sen}\,(3x - 1)$

$y' = \cos\,(3x - 1)\;\; y'(3x - 1) = 3 \cos\,(3x - 1)$

$y = \text{sen}\,(3x^2 - 1)$ Donde $u = 3x^2 - 1$ y $u' = 6x$

$y' = \cos u \cdot u' = \cos\,(3x^2 - 1)\,(6x) = 6x \cos\,(3x^2 - 1)$

$y = \text{sen}^2 x$ Donde $y = (\text{sen}\, x)^2$

$y' = 2\,\text{sen}\, x\;\; y'(\text{sen}\, x) = 2\,\text{sen}\, x\, \cos x = \text{sen}\, 2x$

NOTA. Por la identidad trigonométrica se tiene que sen 2x = 2 sen x cos x

Entonces $\boxed{y'\,(\text{sen}\, u) = \cos u \cdot u'}$ Derivada de la función seno

Empleando la regla de los 3 pasos encontrar la derivada de sen x.

b) *DERIVADA DE LA FUNCIÓN COSENO*

Derivar:

$y = \cos 2x$	$y = \cos(3x^2 - x)$
$u = 2x$, $u' = 2$	$u = 3x^2 - x$, $u' = 6x - 1$
$y' = -\text{sen}\, u \cdot u' = -\text{sen}\, 2x\,(2)$	$y' = -\text{sen}\, u \cdot u' = -\text{sen}\,(3x^2 - x)\,(6x - 1)$
$y' = -2\,\text{sen}\, 2x$	$y' = -(6x - 1)\,\text{sen}\,(3x^2 - x)$

Entonces $\boxed{y'\,(\cos u) = -\text{sen}\, u \cdot u'}$ Derivada de la función coseno

c) *DERIVADA DE LA FUNCIÓN TANGENTE*

Derivar:

$y = \tan x - 2x$

$u = x \quad u' = 1$

$y' = \sec^2 x(1) - 2$

$y' = \sec^2 x - 2$

$y = \tan \sqrt[3]{2x}$ Donde $y = \tan(2x)^{1/3}$

$y' = \frac{1}{3}(\tan 2x)^{-2/3} \frac{d(\tan 2x)}{dx}$ Con $u = 2x$; $u' = 2$

$y' = \frac{1}{3}(\tan 2x)^{-2/3} \sec^2 2x\,(2)$

$y' = \frac{2 \sec^2 2x}{3(\tan 2x)^{2/3}}$

Entonces $\boxed{y'(\tan u) = \sec^2 u \cdot u'}$ Derivada de la función tangente

Empleando el método de los 3 pasos encontrar la derivada de tan x.

d) *DERIVADA DE LA FUNCIÓN COTANGENTE*

Derivar:

$y = 2 \cot \frac{x}{3}$ Donde $u = \frac{x}{3}$, $u = \frac{1}{3}$

$y' = 2(-\csc^2 u)\frac{1}{3} \quad \therefore \quad y' = -\frac{2}{3}\csc^2 \frac{x}{3}$

$$f(x)=\frac{1}{4}\cot.7x \qquad \text{Donde } u=7x \quad , \quad u'=7$$

$$y'=\frac{1}{4}(-\csc^2 7x)(7) \quad \therefore \quad y'=-\frac{7}{4}\csc^2 7x$$

Entonces $\boxed{y' (\cot u) = -\csc^2 u \cdot u'}$ Derivada de la función cotangente

e) *DERIVADA DE LA FUNCIÓN SECANTE*

Si tenemos presente que $\sec u = \dfrac{1}{\cos u} = (\cos u)^{-1}$ y $\tan u = \dfrac{\text{sen} u}{\cos u}$

y sea y = sec u en donde u = f(x)

como sec u = $(\cos u)^{-1}$

y = sec u = $(\cos u)^{-1}$

entonces y = $(\cos u)^{-1}$

Derivamos aplicando: $y'(u^n) = nu^{n-1}u'$

$$y' = -1(\cos u)^{-2}\ y'(\cos u) = \frac{-1}{(\cos u)^2}\cdot\frac{-\text{sen}\, u\cdot u'}{1}$$

$$y' = \frac{(\text{sen}\, u)\, u'}{\cos^2 u} = \frac{\text{sen}\, u}{\cos u}\cdot\frac{1}{\cos u}\cdot u'$$

Sustituyendo los cocientes por las identidades trigonométricas, se tiene:
y = tan u sec u u’

Entonces $\boxed{y'(\sec u) = \sec u \ \tan u \ u'}$ La derivada de la función secante

Derivar:

$$f(x) = 7\sec\frac{x}{3} \qquad u = \frac{x}{3} \quad , \quad u' = \frac{1}{3}$$

$$y' = 7(\sec u \tan u)\frac{1}{3}$$

$$y' = \frac{7}{3}\sec\frac{x}{3}\tan\frac{x}{3}$$

$$f(x) = \sec 3x \qquad u = 3x \quad , \quad u' = 3$$

$$y' = \sec u \tan u(3)$$

$$y' = 3\sec 3x \tan 3x$$

f) *DERIVADA DE LA FUNCIÓN COSECANTE*

Derivar:

$$y = \frac{1}{4}\csc 3x \qquad u = 3x \quad , \quad u' = 3$$

$$y' = \frac{1}{4}(-\csc u \ \cot u)\ (3)$$

$$y' = -\frac{3}{4}\csc 3x \ \cot 3x$$

$$y = \csc\frac{1}{1-x} \qquad u = \frac{1}{1-x} \quad , \quad u' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$y' = -\csc\frac{1}{1-x}\ \cot\frac{1}{1-x}\left[\frac{1}{(1-x)^2}\right]$$

$$y' = -\frac{1}{(1-x)^2}\ \csc\frac{1}{1-x}\ \cot\frac{1}{1-x}$$

Entonces $\boxed{y'(\csc u) = -\csc u \ \cot u \ \ u'}$ La derivada de la función cosecante

NOTA La función cosecante se obtiene en forma análoga a la secante, realiza ese procedimiento para obtenerla.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

1.- Obtener la fórmula de la derivada de la función coseno.

2.- Obtener la fórmula para la derivada de la función cotangente

3.- Derivar las siguientes funciones trigonométricas

$$f(x) = \tan 2x$$

$$f(x) = \sec x^2$$

$$f(x) = 4sen2x$$

$$f(x) = 3\cos x / 2$$

$$f(x) = 3sen^2 x / 2$$

$$f(x) = \sqrt{sen, x}$$

$$f(x) = sen(1-x)^2$$

$$f(x) = \tan(\frac{2-x)}{2+x})$$

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\sec x}}$$

1.2.7 DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

FUNCIÓN INVERSA.

1) Se llama función inversa de y = f(x) a la que se obtiene despejando x.

   Ejemplo: Función inversa de y = 2x + 7 es x = $\frac{y-7}{2}$

   La inversa de sen x es arc sen y, que se lee, ángulo cuyo seno es y.

   Si consideramos el arco en vez del ángulo se usa la notación, x = arc sen y; que se lee, x igual a un arco cuyo seno es y perpendicular, x con y, en la expresión anterior queda, y = arc sen x que es la función inversa del sen x

   Algunos autores escriben la expresión y = arc sen x en la forma siguiente:

   y = sen^{-1} x que se lee; el seno inverso de x, lo cual, es lo más usual en nuestro medio por que sen^{-1}x, así escrito podría leerse como $(\text{sen x})^{-1}$ con exponente –1.

   En nuestro estudio usaremos las expresiones en que se consideran el arco y ángulo.

   Las funciones trigonométricas inversas son multiformes, es decir que a cada valor de la variable independiente le corresponde dos o más valores a la función.

2) Gráficas de las funciones trigonométricas inversas.

   Recordando de nuestro curso de trigonometría, el procedimiento utilizando para construir las gráficas de las funciones trigonométricas directas, es el mismo para las inversas, utilizando para ambas un sistema de coordenadas rectangulares.

   Para las inversas el valor de las razones se indican sobre el eje horizontal de la x, los ángulos correspondientes se dan sobre el eje vertical.

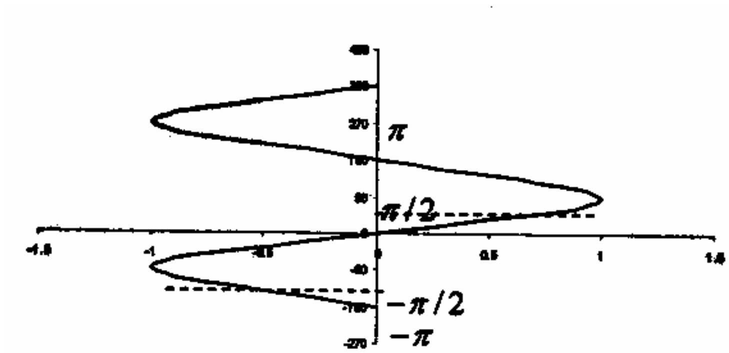
   Así la gráfica de la función trigonométrica inversa del seno y que ilustra observamos.

   a. La curva podemos extenderla independientemente hacia arriba y hacia abajo.

   b. Si trazamos una perpendicular sobre el eje de las x, por ejemplo en el punto 0.5 le corresponde los ángulos de 30 y 150 y todos los ángulos que se obtengan sumando o restando a estos 360, tales como 390, 510,... etc.

   c. El valor de seno esta definido para cualquier valor de x aunque con objeto de evitar confusiones al referirnos a una determinada parte de las funciones trigonométricas inversas, se definen para cada una de ellas un arco que se le llama arco que se le llama arco principal en el caso del seno esta representado en la figura como un trazo mas grueso, se expresa.

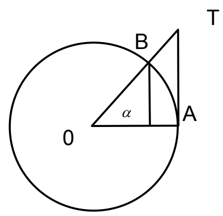
FUNCIÓN	RAMA PRINCIPAL
y = arc sen x	$-\pi/2 < y < \pi/2$
	$-90° < y < -90°$
Para las demás funciones se tiene:	
y = arc cos x	$0 < y < \pi$
	$0 < y < 180°$
y = arc tan x	$-\frac{\pi}{2} < y < -\frac{\pi}{2}$
	$90° < y < 90°$
y = arc cot x	$-\frac{\pi}{2} < y < -\frac{\pi}{2}$
y = arc sec x	$-\frac{\pi}{2} < y < -\frac{\pi}{2}$
	$-180° < y < -90°$
	$0° < y < \frac{\pi}{2}$
	$0° < y < 90°$
y = arc csc y	$-\frac{\pi}{2} < y < -\frac{\pi}{2}$
	$-180° < y < -90°$
	$0° < y < \frac{\pi}{2}$



Para las derivadas de las funciones trigonométricas inversas, inicialmente vamos a demostrar que:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{sen\alpha}{\alpha} = 1$$

Este límite no se puede obtener con las reglas de los límites, para calcularlo utilizamos algunas propiedades de la geometría y de la trigonometría.



$A\hat{o}B; \overline{B}\,\overline{Q}..L.\overline{O}\,\overline{A};..\overline{T}\,\overline{A}..TAN$

comparando..las..longitudes

$\overline{B}\,\overline{Q} < \overline{A}\,\overline{B} < \overline{A}\,\overline{T}$ (1)

Dividiendo(1)entre..$\overline{O}\,\overline{A}$

$$\frac{\overline{B}\,\overline{Q}}{\overline{O}\,\overline{A}} < \frac{\overline{A}\,\overline{B}}{\overline{O}\,\overline{A}} < \frac{\overline{A}\,\overline{T}}{\overline{O}\,\overline{A}} \qquad (2)$$

Por ser radios del mismo circulo.

$\overline{O}\,\overline{A} = \overline{O}\,\overline{B}$ entonces $\dfrac{\overline{B}\,\overline{Q}}{\overline{O}\,\overline{A}} = \dfrac{\overline{B}\,\overline{Q}}{\overline{O}\,\overline{B}}$

Como $sen\alpha = \dfrac{\overline{B}\,\overline{Q}}{\overline{O}\,\overline{B}}$ sustituyendo $\dfrac{\overline{B}\,\overline{Q}}{\overline{O}\,\overline{A}} = \dfrac{\overline{B}\,\overline{Q}}{\overline{O}\,\overline{B}} = .sen\alpha$ (3)

ya se indica que $\dfrac{\overline{A}\,\overline{B}}{\overline{O}\,\overline{A}} = \alpha$ valor natural del ángulo (4)

$\dfrac{\overline{A}\,\overline{T}}{\overline{O}\,\overline{A}} = \tan\alpha$ (5) sustituyendo en la igualdad .(2) los valores obtenidos en (3), (4) y (5)

queda ,sen $sen\alpha < \alpha < \tan\alpha$ (6)

y dividiendo la igualdad (6) entre senα recordamos que

$$\tan\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} entonces \frac{sen\alpha}{sen\alpha} < \frac{\alpha}{sen\alpha} < \frac{\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}}{sen\alpha}$$; entonces;

$$1 < \frac{\alpha}{sen\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha} \qquad (7)$$

como una desigualdad cambia de sentido al tomar los recíprocos, los tomamos

$1 > \dfrac{sen\alpha}{\alpha} > \cos\alpha$ si tomamos el límite cuando $\alpha \to 0$ queda...

$$1 > \lim_{\alpha\to 0}\frac{sen\alpha}{\alpha} > \lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha \qquad \text{como} \lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha = 1 \text{ tenemos}$$

$$1 > \lim_{\alpha\to 0}\frac{sen\alpha}{\alpha} > 1 \text{ es decir} \qquad \lim_{\alpha\to 0} = \frac{sen\alpha}{\alpha} = 1$$

a) *DERIVADA DE LA FUNCIÓN ARCO SENO*

Derivar

$$y = arc\,sen\,5x^2$$
$$u = 5x^2$$
$$u' = 10x$$

$$y' = \frac{10x}{\sqrt{1-(5x)^2}} = \frac{10x}{\sqrt{1-25x^2}}$$

$$y = arc\;sen\sqrt{x}$$
$$u = \sqrt{x}$$

$$u' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad y' = \frac{u'}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

Entonces $\boxed{y'\,arc\;sen\,u = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}$ La derivada de la función inversa de arc sen

Si tenemos presente que $sen^2 + cos^2\,y = 1$, entonces $\cos y = \sqrt{1-sen^2 y};$ sea y = arc sen u, de donde u = f(x) y escribiendo el inverso del arco sen u, se obtiene sen y = u, la cual al derivarla como una función implícita.

sen y' = u'

cos y y' = u' despejamos $y' = \dfrac{u'}{\cos y}$ (1)

como $sen^2\, y + \cos^2 y = 1$ entonces

la derivada de la función arco seno.

$\cos y = \sqrt{1 - sen^2 y}$ sustituyendo en (1)

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1 - sen^2 y}} \qquad (2)$$

como sen y =u, elevando al cuadrado los dos miembros $sen^2\, y = u^2$, sustituyendo en y'

$$\text{arc sen u} = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

b) *DERIVADA DE LA FUNCIÓN ARCO COSENO*

Derivar

$$y = arc.\cos\frac{x}{2} \qquad u = \frac{x}{2} = \frac{1}{2}x \quad , \quad u' = \frac{1}{2}$$

$$y' = -\frac{1/2}{\sqrt{1-(x/2)^2}} = -\frac{1/2}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}} = -\frac{1/2}{\sqrt{\dfrac{4-x^2}{4}}} = -\frac{1/2}{1/2\sqrt{4-x^2}}$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$y = \text{arc cos } \frac{2x}{3} \qquad u = \frac{2x}{3} = \frac{2}{3}x \quad , \quad u' = \frac{2}{3}$$

$$y' = -\frac{2/3}{\sqrt{1-(2x/3)^2}} = -\frac{2/3}{\sqrt{1-\dfrac{4x^2}{9}}} = -\frac{2/3}{\sqrt{\dfrac{9-4x^2}{9}}} = -\frac{2/3}{1/3\sqrt{9-4x^2}}$$

$$y' = -\frac{2}{\sqrt{9-4x^2}}$$

Entonces $\boxed{y'\ (\text{arc cos } u) = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}$ La derivada de la función inversa arco coseno

De la forma análoga a la de arco sen encuentre la forma de arc coseno.

c) *DERIVADA DE LA FUNCIÓN ARCO TANGENTE*

Derivar

y = arc tan $3x^2$ $\quad u = 3x^2 \quad , \quad u' = 6x$

$$y = \frac{6x}{1+(3x^2)^2} = \frac{6x}{1+9x^4}$$

Derivar

y'= arc tan $\frac{2-x}{3}$ $\quad u = \frac{2-x}{3} \quad u = -\frac{1}{3}$

$$y' = \frac{u'}{\left[1+\left(\frac{2-x}{3}\right)^2\right]} = \frac{-1/3}{\left[1+\frac{(2-x)^2}{3^2}\right]} = \frac{-1/3}{\left[1+\frac{(4-4x+x^2)}{9}\right]} = -\frac{3}{13-4x+x^2}$$

Entonces $\boxed{y'\ \text{arc tan } u = \frac{u'}{1+u^2}}$ La derivada de la función inversa arco tangente

Teniendo presente que: $\sec^2 y - \tan^2 y = 1$ y $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y$, sea y = arc tan u en donde u = f(x) , escribiendo el inverso del arc tan u, el cual es tan y = u, derivando como implícita:

$$y' \tan y = u' \quad ; \quad \sec^2 y\ y' = u'$$

despejando

$$y' = \frac{u'}{\sec^2 y} \qquad (1)$$

entonces $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y$ sustituyendo en (1)

$$y' = \frac{u'}{1+\tan^2 y} \qquad (2)$$

como tan y = u , entonces elevando al cuadrado los miembros, resulta $\tan y^2 = u^2$ y sustituyendo en (2) obtenemos la función inversa tangente.

$$y' arc\ \tan u = \frac{u}{1+u^2}$$

d) *DERIVADA DE LA FUNCIÓN ARCO COTANGENTE*

Derivar

$$y = arc\cot\frac{x}{2} \qquad \text{con} \qquad u = x/2 \quad ; \quad u' = 1/2$$

$$y' = -\frac{1/2}{1+\frac{x^2}{4}} = -\frac{1/2}{\frac{4+x^2}{4}} = -\frac{4}{2(4+x^2)}$$

$$y' = -\frac{2}{4+x^2}$$

Derivar

$$y = arc\cot\sqrt{1+x^2} \qquad \text{con } u = (1+x^2)^{1/2} \quad ; \quad u' = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}(2x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y' = -\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+(1+x^2)^{1/2}} = -\frac{x}{(x^2+2)\left(\sqrt{1+x^2}\right)}$$

Entonces $\boxed{\text{y' arc cot } u = -\dfrac{u'}{1+u^2}}$ La derivada de la función inversa arco cotangente

De la forma análoga a la tangente inversa, encuentra la formula para la derivada de arc cot.

e) *DERIVADA DE LA FUNCIÓN ARCO SECANTE*

Derivar:

y = arc sec (3x + 2) con u = 3x + 2 ; u´ = 3

$$y' = \frac{3}{(3x+2)\sqrt{(3x+2)^2-1}} = \frac{3}{(3x+2)\sqrt{9x^2+12x+3}}$$

Derivar:

y = arc sec x^2

$$y' = \frac{1}{x^2\sqrt{x^4-1}}u'(x^2) = \frac{2x}{x^2\sqrt{x^4-1}} = \frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$$

Entonces $\boxed{\text{y' arc sec } u = \dfrac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}}$ La derivada de la función arco secante

Si sabemos que $\sec^2 y - \tan^2 y = 1$ entonces $\tan^2 y = \sec^2 y - 1$ y $\tan y = \sqrt{\sec^2 y - 1}$.

Sea y = arc sec u donde u = f(x), si escribimos el inverso de arc sec u, entonces :
sec y = u

derivando como implícita. y'sec y = u' ; sec y tan y y' = u'

despejando

$$y' = \frac{u'}{\sec y \tan y} \qquad (1)$$

como $\tan^2 y = \sec^2 y - 1$ y tan y = $\sqrt{\sec^2 y - 1}$

sustituyendo (1) y' = $\dfrac{u}{\sec y \sqrt{\sec^2 y - 1}}$ (2)

y si sec y = u entonces elevando al cuadrado los dos miembros $\sec^2 y = u^2$ sustituyendo en (2)

$$y' \text{arc sec } u = \frac{u'}{u\sqrt{u^2 - 1}}$$

f) *DERIVADA DE LA FUNCIÓN ARCO COSECANTE*

Derivar:

y = arc csc 2x con u = 2x ; u´ = 2

$$y' = -\frac{1}{2x\sqrt{4x^2 - 1}} u'(2x)$$

$$y' = -\frac{2}{2x\sqrt{4x^2 - 1}}$$

$$y' = -\frac{1}{x\sqrt{4x^2 - 1}}$$

Entonces $\boxed{y' \text{ arc csc } u = -\dfrac{u'}{u\sqrt{u^2 - 1}}}$ La derivada de la función arco cosecante

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

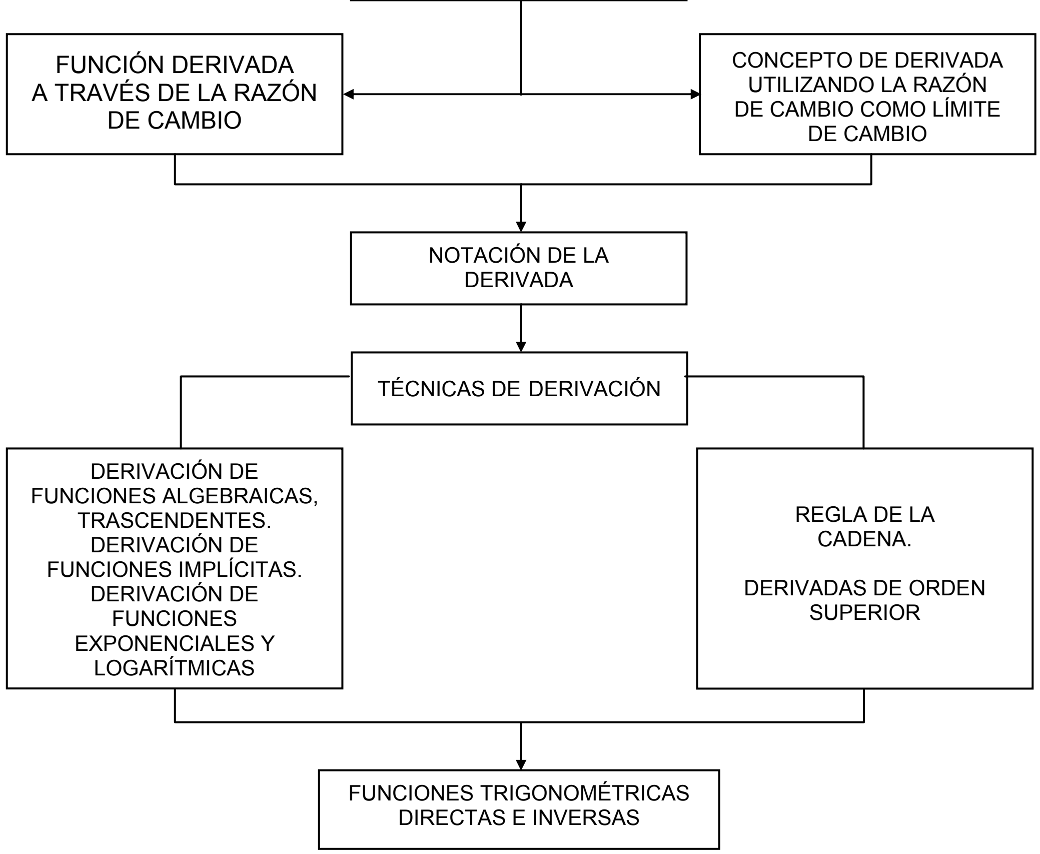
Derivar las siguientes funciones trigonométricas inversas.

1. arc sen (2x – 5)
2. arc sen (x /a)
3. arc cos (x /3)
4. x^2 arc cos (2x)
5. arc cot $\dfrac{1+x}{1-x}$
6. arc sec $\dfrac{3-x}{x}$
7. arc csc (1 – 2 x)

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

Hasta este momento hemos visto los temas para derivar diferentes tipos de funciones, desde las algebraicas, las exponenciales, las trigonométricas directas e inversas y las derivadas de orden superior, esto nos prepara para un mejor entendimiento en lo que respecta a las aplicaciones de la derivada.

RECAPITULACIÓN



Existen muchos elementos interesantes en el desarrollo del fascículo que te pueden servir para complementar el esquema anterior, utilízalos y elabora otro.

ACTIVIDADES INTEGRALES

Para reafirmar los conocimientos adquiridos hasta aquí, te sugerimos resolver los siguientes problemas.

1. Un móvil se desplaza de acuerdo a la ecuación $f(t) = 3t^2 - 2t + 1$. Determinar la velocidad instantánea o tangencial de dicho móvil después de haber transcurrido 3 segundos de iniciar su movimiento y ¿cuál es la razón de cambio?

2. Dada la siguiente función ¿cuál es la razón de cambio, al determinar su derivada considerando que es una partícula suspendida en el espacio?

$$(x) = 5x^3 - 3x + 2$$

AUTOEVALUACIÓN

Para la solución de los problemas utilizamos el siguiente procedimiento.

1. Encontramos la derivada como límite.

$$f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \qquad (1)$$

Si $f(t) = 3t^2 - 2t + 1$ (2)

y $f(t+h) = 3(t+h)^2 - 2(t+h) + 1$ (3)

Entonces desarrollando la 3, nos queda.

$f(t + h) = 3(t^2 + 2th + h^2) - 2t - 2h + 1 = 3t^2 + 6th + 3h^2 - 2t - 2h + 1$ (4)

Sustituyendo 2 y 4 en 1

$$f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{3t^2 + 6h + 3h^2 - 2t - 2h + 1 - 3t^2 + 2t - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6th + 3h^2 - 2h}{h}$$

$$f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{h(6t + 3h - 2)}{h} = \lim_{h \to 0} 6t + 3(0) - 2 = 6t - 2$$

$f'(x) = 6t - 2$ Es la derivada.

-La razón de cambio para $3t^2$ es 6t
-La razón de cambio para –2t es –2

Sustituyendo a t = 3seg en f'(x) = 6t – 2 encontramos la velocidad instantánea.

V = f'(x) = 6t – 2 de donde V = 6(3) – 2 = 18 – 2 = 16 ∴ V = 16m/seg.

2. Si $f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ (1) entonces

$f(x) = 5x^3 - 3x + 2$ (2)

f (x + h) = 5 (x + h)^3 – 3 (x + h) + 2 (3)

Sustituyendo 2 y 3 en 1 tenemos.

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{5(x+h)^3 - 3(x+h) + 2 - (5x^3 - 3x + 2)}{h}$$

Efectuando las operaciones indicadas nos queda.

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{5x^3 + 15x^2h + 15xh^2 + 5h^3 - 3x - 3h + 2 - 5x^3 + 3x - 2}{h}$$

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{15x^2h + 15xh^2 - 3h}{h}$$

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h\,(15x^2 + 15xh - 3)}{h}$$

$$f(x) = \lim_{h \to 0} 15x^2 + 15x(0) + 5(0)^2 - 3$$

$$f(x) = \lim_{h \to 0} 15x^2 - 3 \quad \text{de donde} \quad f'(x) = 15x^2 - 3$$

-La razón de cambio de $5x^3$ es $15x^2$
-La razón de cambio de -3x es -3

CAPÍTULO 2

APLICACIONES DE LA DERIVADA

PROPÓSITO

Considera Las siguientes preguntas antes de introducirte al estudio de este capítulo, esto te ayudará a tener un panorama general de sus contenidos, la forma de abordarlos y la utilidad que te reportará su aprendizaje.

¿Qué voy a aprender?	¿Cómo lo voy a lograr?	¿Para qué me va a servir?
Criterios para analizar cuantitativa y cualitativamente funciones que modelan situaciones que se presentan en diversas ramas del conocimiento y la actividad humana.	Estableciendo modelos matemáticos para diversas situaciones, incluyendo sus gráficas, ampliando el concepto de derivada y aplicando las técnicas de derivación.	Para hallar la solución de problemas que se refieren a optimización y razón de cambio y tener más elementos para la toma de decisiones tanto en la vida cotidiana como en tu actividad profesional.

CAPÍTULO 2

APLICACIONES DE LA DERIVADA

A menudo la vida nos enfrenta al problema de encontrar un mejor modo de hacer una determinada labor. Por ejemplo, un agricultor quiere escoger la mezcla de cultivos que sea la más apropiada para obtener el mayor aprovechamiento. Algunas veces un problema de esta naturaleza puede asociarse de tal manera que involucre maximizar o minimizar una función sobre un conjunto específico.

2.1 ANÁLISIS Y TRAZO DE CURVAS

En este tema se examinarán las funciones mediante la tabulación y el posterior análisis de su comportamiento gráfico.

2.1.1 ESTUDIO DE LA VARIACIÓN DE UNA FUNCIÓN

a) Tabulación y Graficación de una Función

Ejemplo.

Un grupo de investigadores ecologistas observó que el crecimiento de un pino de una especie determinada esta dado por la siguiente función.
y = $\sqrt{x}$

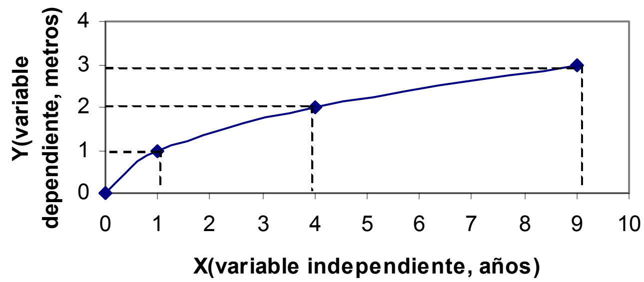
En donde ‘x’ representa el número de años transcurridos de la vida del pino y la ‘y’ representa su altura en metros.

Completa la siguiente tabla

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1			2					3

Los valores que se le dan a ‘x’ son arbitrarios, y pueden ser más grandes que 9, pero no más pequeños que cero, ¿por qué?

La gráfica queda como se muestra a continuación.



Recuerda que la variable ‘y’ es una función de ‘x’, (y = f (x)).

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Contesta las siguientes preguntas con base a la función que rige el crecimiento del pino.

¿Cuál es el más pequeño valor que puede tomar el tiempo (x)?

____

¿Cuál es el mas alto valor que puede tomar el tiempo (x)?

____

¿Cuál es el más pequeño valor que puede tomar la altura del pino (Y)?

____

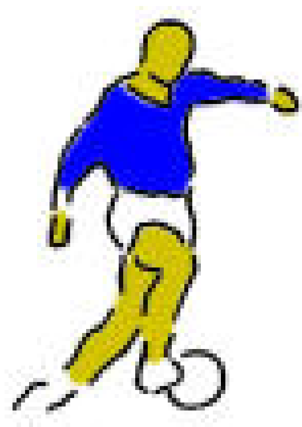
¿Cuál es el más alto valor que puede tomar la altura del pino (Y)?

____

Ejemplo

La altura a la que se encuentra una pelota pateada desde un punto situado a 10 pies sobre el nivel del suelo esta dada por la siguiente función

$h(t) = 80t - 16t^2 + 10$

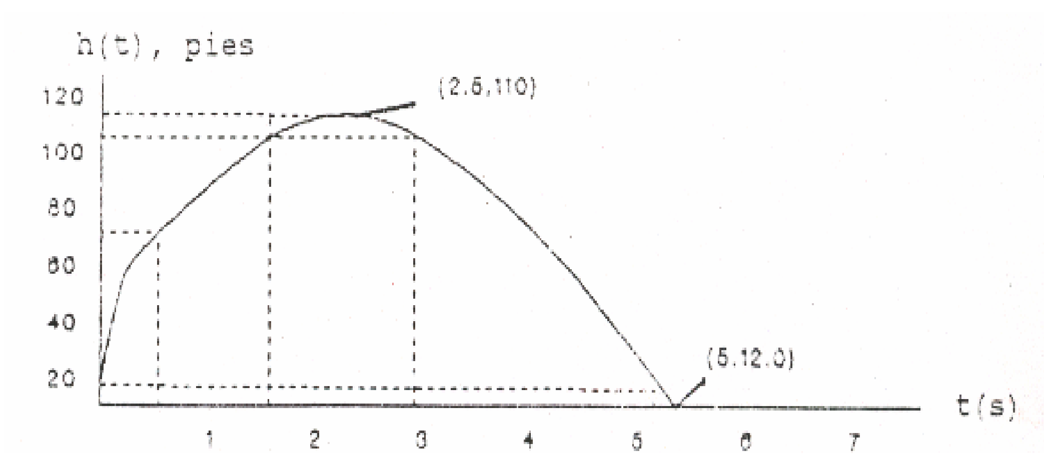


En donde “t” es el tiempo (en segundos) y h (t) es la altura (en pies) sobre el suelo a la que se encuentra situada la pelota en el instante t.

Completa la siguiente tabla

T	0	1	2	2.5	3	4	5	6
h (t)			106		106			

La gráfica se muestra a continuación



Observa la gráfica y analiza las siguientes preguntas.

¿Para que valores del tiempo (t), la altura (h) que alcanza la pelota tiene significado lógico? A ese conjunto se llama dominio, y se presenta así:

$$0 \leq t \leq 5.12$$

Lo que significa que 't' es mayor o igual que cero, pero menor o igual que 5.12
¿Cuáles son los posibles valores de la altura que puede alcanzar la pelota? A ese conjunto se le llama rango, y se presenta así:

$$0 \leq h \leq 110$$

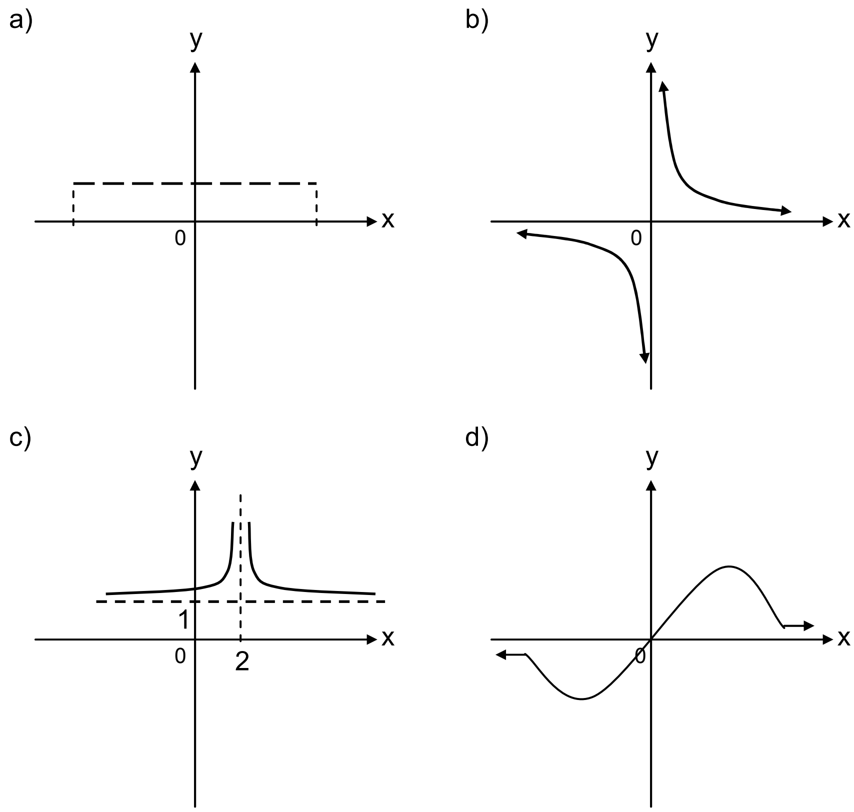
y significa que 'h' es mayor o igual que cero, pero menor o igual que 110.

b) Dominio y Rango de una Función

A partir de las gráficas siguientes obtén la información necesaria para contestar lo que se te pide a continuación:

¿Cuál es el intervalo de valores que puede tomar 'x' para que la función exista?

¿Cuál es el intervalo de valores que puede tomar 'y', que corresponden a las imágenes de los valores que pueden tomar 'x'?



Ahora ya se pueden definir el dominio y el rango definiciones

DOMINIO (D). El dominio de una función son todos los valores de la variable independiente ‘x’ que hacen que la función sea real, es decir, que exista.

RANGO (R). El rango o conjunto de imágenes de una función son todos los valores que puede tomar la función (y) para todos y cada uno de los elementos del dominio.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

1. Para cada una de las funciones siguientes, encuentra su gráfica, su dominio, y su rango.

   a) $f(x) = 5$, $0 < x < 6$, (este intervalo debe considerarse como el dominio)

   b) $f(x) = 3X + 2$, $-3 \leq x \leq 3$.

   c) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$

   d) $f(x) = \sqrt{3x+2}$

2. Para cada una de las siguientes funciones encuentra su gráfica, su dominio y su rango.

   a) $f(x) = x^2$, (para toda x)

   b) $f(x) = 3x^2 + 5$, $x > -1$.

   c) $f(x) = \sqrt{4x}$

   d) $f(x) = x^3 - 1$, $x \neq 0$.

   e) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ (el denominador, $x - 2$ debe ser diferente de cero)

   f) $f(x) = \sqrt{2x-1}$ (el radicando, $2x - 1$, debe ser mayor o igual a cero)

2.1.2 INTERSECCIONES CON LOS EJES COORDENADOS

Ejemplo.

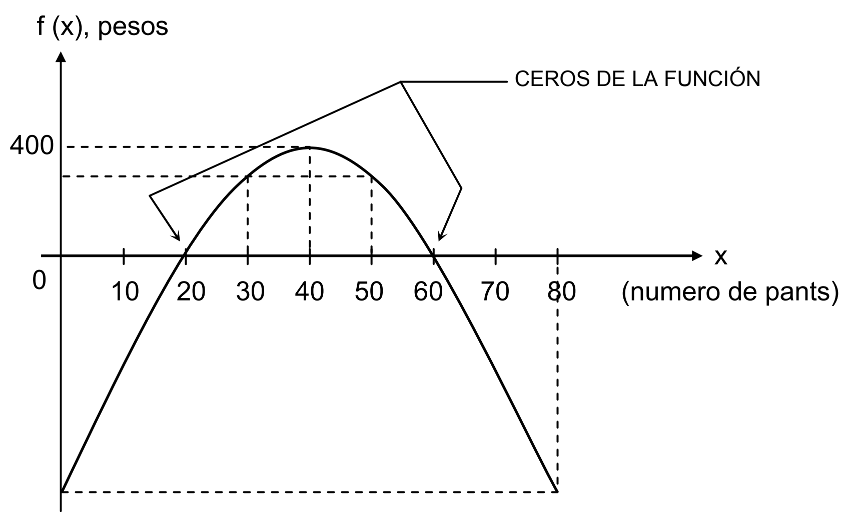
En una fábrica de pants deportivos se encontró que la función que describe las ganancias, f(x), de la empresa en términos del número 'x' de pants, producidos esta dada por la siguiente expresión.

$f(x) = -x^2 + 80x - 1200$

Al realizar la tabla

x	0	10	20	31	40	49	60	70	80
f (x)	-1200		0				0		

Puedes observar que existen dos diferentes valores de la producción, (x), para los que las ganancias, f (x), son nulas es decir, que corresponden a cero ganancias.



Al graficar la función se pueden apreciar los valores de ‘x’ para los que la función vale cero, es decir, x = 20 y x = 60.

¿En dónde se encuentran estos dos puntos?

¿Te das cuenta de que estos dos puntos representan las intersecciones con el eje ‘x’ (eje de las abscisas)?

Pues bien, existe un método algebraico para hallar las intersecciones con el eje ‘x’:

Si en la función original $f(x) = -x^2 + 80x - 1200$

se hace que f (x) sea igual a cero, ¿qué es lo que obtienes?

$$0 = -x^2 + 80x - 1200$$

que representa una ecuación de segundo grado.

¿Puedes resolverla?

¿Cuánto vale a, b y c?

Aplica la fórmula general para resolver la ecuación.

La formula general es: $X_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Como a = –1, b = 80 y c = –1200, entonces,

$$X_{1,2} = \frac{-(80) = \sqrt{(80)^2 - 4(-1)(-1200)}}{2(-1)}$$

o $$X_{1,2} = \frac{-80 \pm \sqrt{6400 - 4800}}{-2}$$

o bien $$X_{1,2} = \frac{-80 \pm \sqrt{1600}}{-2}$$

o también $$X_{1,2} = \frac{-80 \pm 40}{-2}$$

Así que $$X_1 = \frac{-80 + 40}{-2} = \frac{-40}{-2} = 20$$

y $$X_2 = \frac{-80 - 40}{-2} = \frac{-120}{-2} = 60$$

a) Ceros de la Función

¿Te das cuenta? Al utilizar el método algebraico también es posible hallar las intersecciones con el eje ‘x’ . A estos valores de ‘x’ se les llama ceros de la función.

¿Crees que se puedan encontrar las intersecciones con el eje ‘y’? ¿De que modo?

Observa nuevamente la tabla.

¿Existe algún valor para las ganancias, f(x), tal que la producción, ‘x’, sea igual a cero?

¡Claro esta! Cuando f(x) vale –1200, ‘x’ vale cero.

¿Qué es lo que esto significa para la empresa?

También puedes verificarlo en la gráfica.

Pero, el método algebraico para hallar las intersecciones con el eje ‘y’ es como sigue:

Si en la función original $f(x) = -x^2 + 80x - 1200$

Se hace que ‘x’ sea igual a cero, ¿qué se obtiene?

$$f(x) = -(0)^2 + 80(0) - 1200$$

o sea $f(x) = -1200$

lo que se esperaba.

Así que

Para hallar las intersecciones con el eje ‘x’, se hace que f(x) sea igual a cero; y se resuelve la ecuación resultante.

Para hallar las intersecciones con el eje ‘y’, se hace que ‘x’ sea igual a cero; y se resuelve la ecuación resultante.

Definición.

Se llama ‘ceros’ de una función a todos los valores de ‘x’ para los cuales la función es nula, es decir, cero.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

1. Para cada una de las funciones siguientes, encuentra su gráfica, las intersecciones con el eje ‘x’, las intersecciones con el eje ‘y’ y los ceros.

a) $f(x) = 3x - 2$

b) $f(x) = -2x - 3$

c) $f(x) = x^2 + 6x$

d) $f(x) = 2x^2 - 32$

e) $f(x) = X^2 + x - 6$

f) $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$

2. Para cada una de las funciones siguientes, encuentra su gráfica, las intersecciones con el eje ‘x’, las intersecciones con el eje ‘y’ y los ceros.

a) $f(x) = 6x + 1$

b) $f(x) = -3x + 2$

c) $f(x) = x^2 - 4x$

d) $f(x) = x^2 - 49$

e) $f(x) = x^2 - 8x + 15$

f) $f(x) = 3x^2 - 8x - 3$

b) Intervalos para los que la Función es Positiva

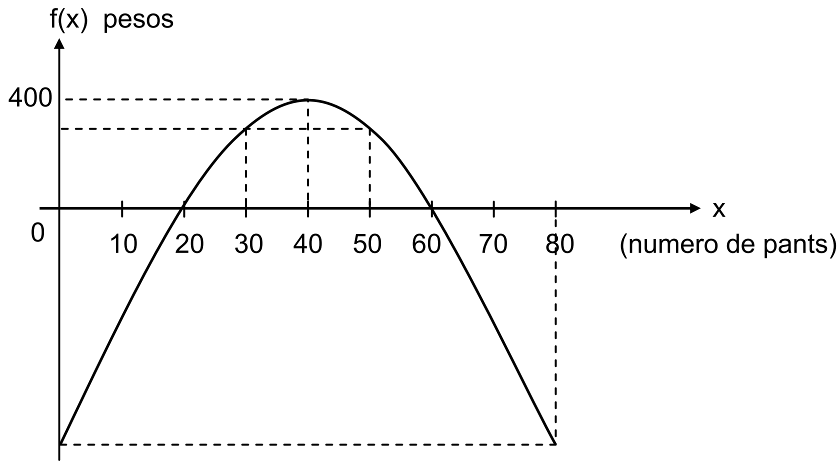
Observa la siguiente tabla

x	0	10	20	31	40	49	60	70	80
f (x)	–1200	–500	0	319	400	319	0	–500	–1200

¿Para qué valores de la producción, x, la empresa obtiene ganancias, f (x)?

¡Bien! Estos son 31, 40 y 49 pants.

Ahora, observa la siguiente gráfica



¿Existen otros valores de la producción para que la empresa obtenga ganancias?

¿Cuál es el mínimo valor de la producción para el que la empresa obtiene ganancias?

¿Cuál es el máximo valor de la producción para el que la empresa obtiene ganancias?

¿Cuál es el intervalo que obtienes?

Pues bien, el intervalo de la producción para el que la empresa obtiene ganancias es:

$$21 \leq x \leq 59$$

(en los intervalos cerrados, $\leq$, los extremos si se incluyen) y deben leerse así; 'x' es mayor o igual que 21 pero menor o igual que 59. Lo que es muy cierto puesto que cuando X = 20; o X = 60, la función no es positiva ni negativa, es nula. Además, los valores de 'x' deben ser numeros enteros puesto que representan la producción de pants (completos).

c) Intervalos para los que la función es negativa

¿Para que valores de la producción (x), la empresa registra ganancias negativas, es decir, perdidas?

x	0	10	20	31	40	49	60	70	80
f (x)	–1200	–500	0	319	400	319	0	–500	–1200

Ahora, observa nuevamente la gráfica anterior.

¿Existen mas valores de ‘x’ para los que las ganancias sean negativas?

¿En cuantos intervalos la función, f (x), es negativa?

¿Cuáles son?

¡Claro! Estos intervalos deben ser

$$0 < x < 20 \qquad y \qquad 60 < x < \infty$$

(en los intervalos abiertos, <, los extremos no se incluyen)

el signo ‘∞’ indica que la producción puede ser muy alta, mucho más grande que 80, que son los valores para los que siempre se obtendrán perdidas. ¿Por qué motivos se podría presentar esta situación en la empresa?

Definiciones

FUNCIÓN POSITIVA. Una función es positiva si al graficarla se encuentra por encima del eje ‘x’.

FUNCIÓN NEGATIVA. Una función es negativa si al graficarla se encuentra por debajo del eje ‘x’.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

1. Para cada una de las funciones siguientes, encuentra sus ceros, los intervalos en donde la función es positiva y los intervalos en donde es negativa.

a) $f(x) = 3x – 2$

b) $f(x) = -2x – 3$

c) $f(x) = x^2 + 6x$

d) $f(x) = 2x^2 - 32$

e) $f(x) = x^2 + x – 6$

f) $f(x) = 2x^2 – 7x + 3$

2. Para cada una de las funciones siguientes, encuentra sus ceros, los intervalos donde la función es positiva y los intervalos en donde la función es negativa.

a) $f(x) = 6x + 1$
b) $f(x) = -3x + 2$
c) $f(x) = x^2 - 4x$
d) $f(x) = x^2 - 49$
e) $f(x) = x^2 - 8x + 15$
f) $f(x) = 3x^2 - 3x - 3$

2.1.3 MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN

Ejemplo

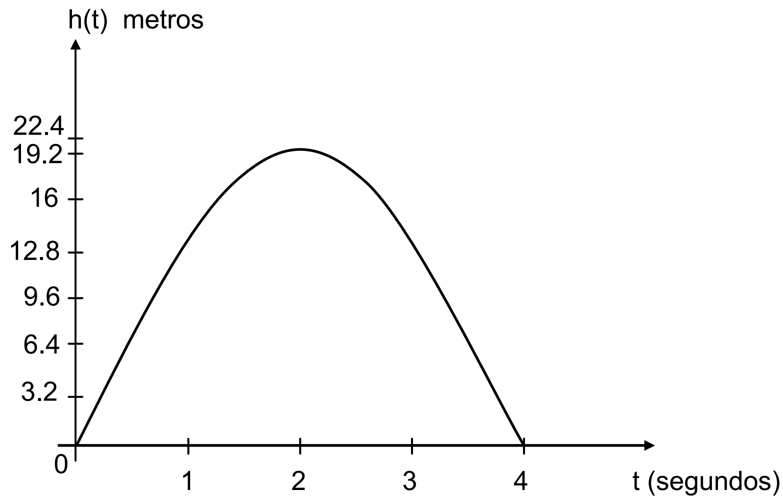
Desde el fondo de un pozo de 15 metros de profundidad, un excursionista, que allí se encontraba por accidente, lanza piedras para que sus compañeros las vean, y así pueda ser rescatado.
La velocidad con la que lanza las piedras verticalmente hacia arriba es de $V_o = 20$ m/s.
Se sabe que la función que describe la altura que alcanza la piedra en términos del tiempo es

$$h(t) = V_o\, t - \frac{gt^2}{2}$$

Sustituyendo $V_o = 20$ m/s y $g = 9.8$ m/s^2 tenemos que $h(t) = 20t - 4.9t^2$

Para graficar esta expresión variamos el valor de "t" según la siguiente tabla.

t	h(t)	
0	0	$h(0) = 20(0) - 4.9(0)^2 = 0$
1	15.1	$h(1) = 20(1) - 4.9(1)^2 = 15.1$
2	20.4	$h(2) = 20(2) - 4.9(2)^2 = 20.4$
3	15.9	$h(3) = 20(3) - 4.9(3)^2 = 15.9$
4	1.6	$h(4) = 20(4) - 4.9(4)^2 = 1.6$



Observa la tabla y la gráfica para contestar las siguientes preguntas:

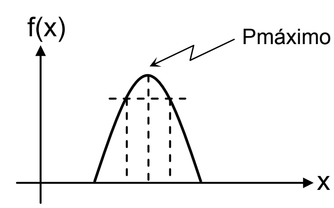
¿Para que valor de ‘t’ la piedra asciende? (El valor de la función aumenta, es decir, crece)

¿Para que valor ‘t’ la piedra desciende? (el valor de la función disminuye, es decir, decrece)

¿Cuál es el máximo valor que puede tomar la altura?

Definición

PUNTO MÁXIMO. Se dice que un punto sobre una determinada curva, f (x), es un máximo relativo, si los valores de la función un poco a la izquierda y un poco a la derecha de dicho punto son más pequeños.



a) Intervalos para los que la Función es Creciente

Después de observar la tabla y la gráfica anteriores

¿Podrías decir cual es el intervalo para el que la función es creciente?

Recuerda que el intervalo de definición debe estar en términos de la variable ‘t’.
Así que, debe ser $0 < t < 2$

No se incluyen los extremos, $t = 0$ y $t = 2$, dado que en esos puntos la función no crece ni decrece.

b) Intervalos para los que la Función es Decreciente

Después de observar la tabla y la gráfica anteriores

¿Podrías decir cual es el intervalo para el que la función es decreciente?

Dicho intervalo debe ser así:

$$2 < t < 3$$

Definiciones

FUNCIÓN CRECIENTE. Una función es creciente cuando al aumentar el valor de la variable independiente, (x), el valor de la variable dependiente, (y), también aumenta.

FUNCION DECRECIENTE. Una función es decreciente cuando al aumentar el valor de la variable independiente, (x), el valor de la variable dependiente, (y), disminuye.

Durante los primero 7 segundos, el pulso (en pulsaciones por minuto) de un individuo ‘t’ segundos después de que comienza a correr está dado por

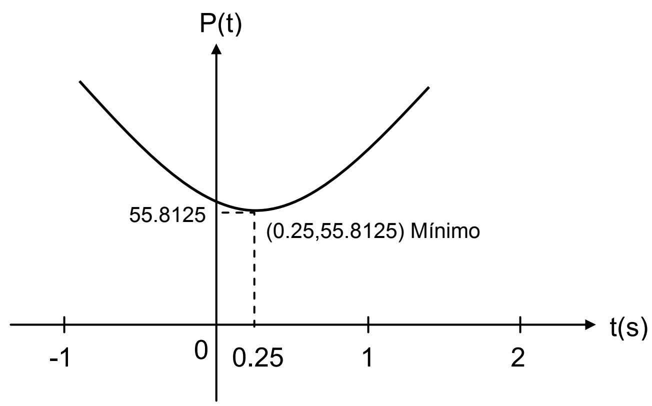
$$P(t) = 2t^2 - t + 56$$

El dominio de la función está dado en el mismo enunciado del problema. ¿Puedes decir cuál es?

Completa la siguiente tabla

t	0	1	2	3	4	5	6	7	–1	–2	–3	0.25
P(t)			62				122			66		55.8125

La gráfica de esta función es la que a continuación se muestra, ¡verifícalo!



ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Después de observar la tabla y la gráfica anteriores, contesta las siguientes preguntas:

¿Cuál es el valor más pequeño de la función?

¿Para que valor de ‘t’ la función es creciente?

¿Puedes determinar el intervalo de valores de ‘t’ para los que la función sea decreciente en el sentido del contexto del problema?

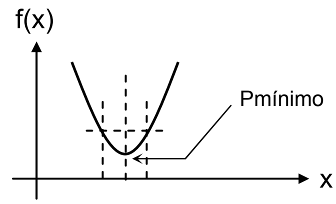
¡Muy bien! El valor más pequeño de la función es 55.875 (pulsaciones por minuto). Además, el intervalo de valores de ‘t’ para los que la función es creciente es

$$0.25 < t < 7$$

y, el intervalo de ‘t’ para los que la función es decreciente es

$$0 < t < 0.25$$

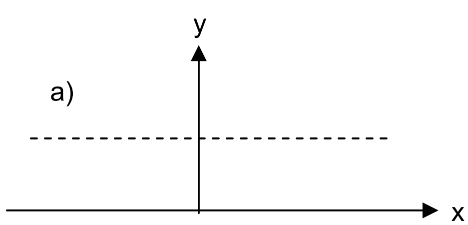
Definición.

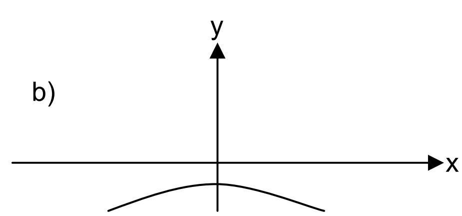
> PUNTO MÍNIMO. Se dice que un punto sobre una determinada curva f (X), es un mínimo relativo, si los valores de la función un poco a la izquierda y un poco a la derecha de dicho punto, son más grandes.
>
> 
>

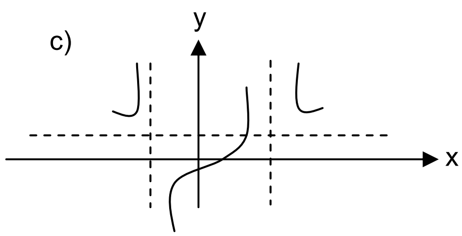
ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

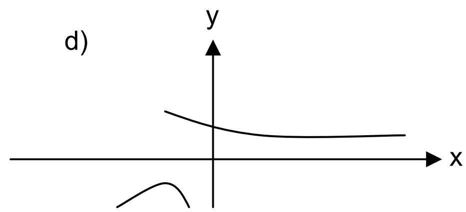
Para las gráficas que se muestran a continuación, determina:

Los intervalos en los que la función es positiva
Los intervalos en los que la función es negativa
Los intervalos en los que la función es creciente
Los intervalos en los que la función es decreciente









c) Criterio de la Primera Derivada Para la Obtención de Máximos y Mínimos de una Función.

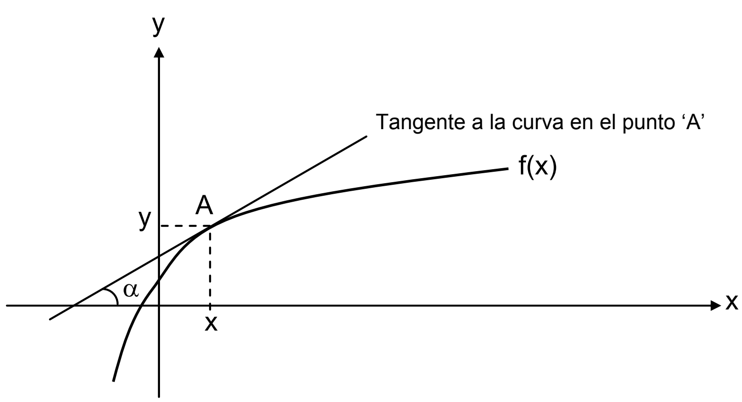
Conceptos Básicos.

Recordaras que la derivada de una función y = f(x), en un punto A(x,y), esta representada geométricamente por la pendiente de la tangente a la curva en ese punto.

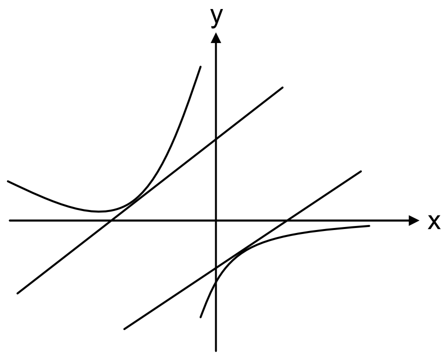
Si $\quad Y = f(x),$

entonces, $\quad f'(x) = tg\ \alpha$

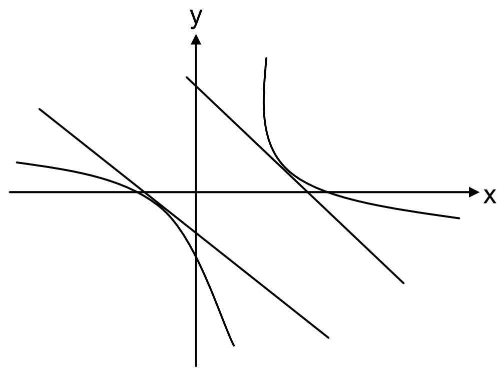
en donde 'α' es la inclinación de la recta tangente, y 'tg α' es la pendiente de dicha tangente.



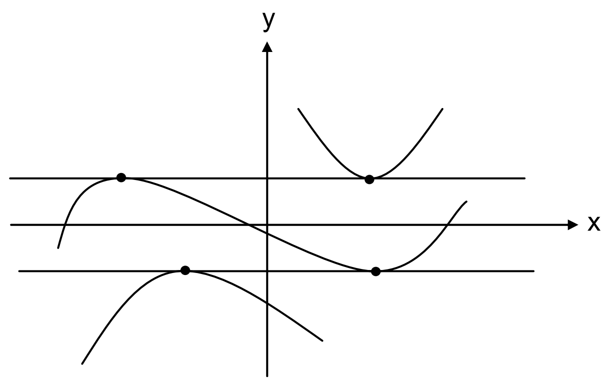
Además también se requiere que recuerdes como es la orientación de la tangente, mencionada con anterioridad, cuando su pendiente es positiva, negativa o cero.



Recta con pendiente positiva



Recta con pendiente negativa



Recta con pendiente 'cero'

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Contesta las siguientes preguntas con base a las gráficas anteriores.

¿Cómo debe se la derivada de la función cuando la tangente tiene pendiente positiva?

¿Cómo debe se la derivada de la función cuando la tangente tiene pendiente negativa?

¿Cómo debe se la derivada de la función cuando la tangente tiene como pendiente el valor cero?

En un laboratorio de investigaciones nucleares, cierto científico encontró que la función que describe la posición de científico encontró que la función que describe la posición de una determinada partícula subatómica, que se desplaza sobre una recta coordenada, esta dada por

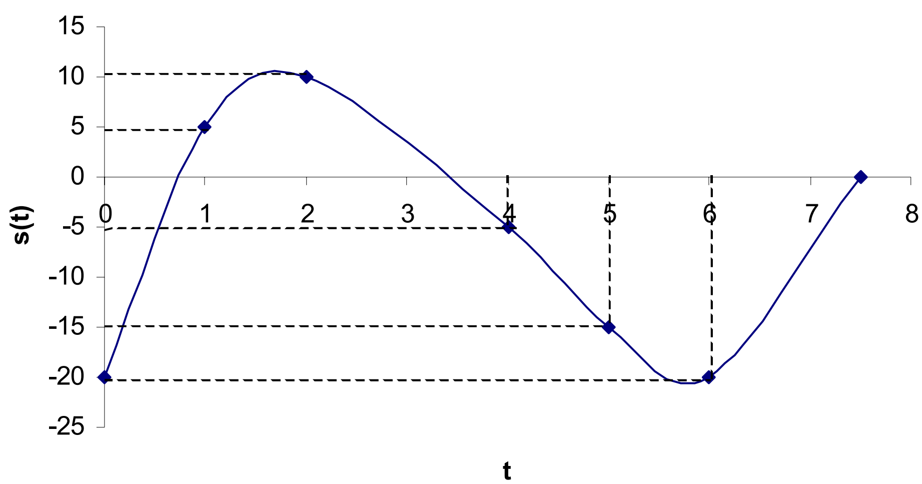
$$s\,(\,t\,) = t^3 - 12t^2 + 36t - 20,$$

En donde, s(t), representa la posición de la partícula en el instante ‘t’, y la variable ‘t’ representa cualquier instante (en segundos).

t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
s(t)	–20					10.375		10.625	–4

4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	10
		18.625				–3.125		

La gráfica que corresponde a la función dada, es



¿Puede dar los intervalos en los que la función es creciente?

¿Cuál es el intervalo en donde la función es decreciente?

Claro que seria más fácil hallar dichos intervalos si se conocieran con seguridad los valores de ‘t’ para los que la función es máxima o mínima.

¿Cómo deben ser las tangentes en los puntos críticos, ya sea máximos o mínimos?

¿Y como deben ser sus pendientes?

¿Y cual debe ser el valor de la derivada de la función en dichos puntos?

Pues bien, para hallar con precisión los máximos y mínimos, en la ecuación resultante se despeja la variable.

Así si la función es

$$S(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 20$$

Su derivada resulta ser

$$S'(t) = 3t^2 - 24t + 36$$

Y, al igualar a cero, se obtiene que

$$3t^2 - 24t + 36 = 0$$

se puede ver que se trata de una ecuación de segundo grado, y para resolverla debes aplicar la ecuación general

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

¿Qué valores obtuviste?

¿Puedes decir lo que significan?

Los valores obtenidos son t_1 = 2 seg. Y t_2 = 6 seg., que son los instantes en donde se obtiene un máximo y un mínimo.

Pero, si no conocieras la gráfica, ¿podrías determinar en que instante se obtiene un máximo y en cual otro se obtiene un mínimo?

¿Cuál es el valor de la derivad para un valor de 't' a la izquierda de t = 2?

¿Puedes obtener una conclusión a este respecto?

¿Cuál es el valor de la derivada para un valor de 't' a la izquierda de t = 6?

¿Cuál es el valor de la derivada para un valor de 't' a la derecha de t = 6?

¿Puedes obtener una conclusión a este respecto?

Como la derivada de la función es $S'(t) = 3t^2 - 24t + 36$

Entonces, para t = 1.9 seg., que es un valor de 't' un poco a la izquierda de t = 2 seg., se tiene que

$$S'(1.9) = 3\,(1.9)^2 - 24\,(1.9) + 35 = 1.23$$

y como es un valor positivo de la derivada, entonces, la pendiente es positiva y la función en ese instante es creciente.

Así también, para t = 2.1 seg., que es un valor de 't' un poco a la derecha de t = 2 seg., se tiene que

$$S'(2.1) = 3\,(2.1)^2 - 24\,(2.1) + 36 = -1.17$$

y como es un valor negativo de la derivada, entonces, la pendiente de la tangente a la curva es negativa y a la función en ese instante es decreciente.

En conclusión, como la función primero crece (en t = 1.9) y luego decrece (en t = 2.1), entonces, el punto crítico encontrado en t = 2 es un máximo.

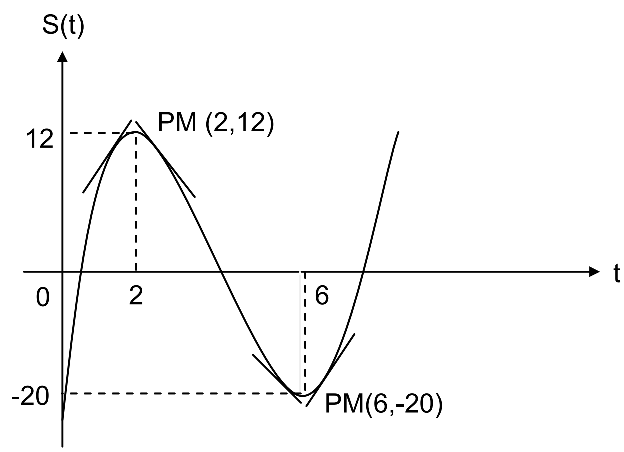
Para calcular el valor del punto máximo se sustituye t = 2 en la función original (sin derivar).

$$S(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 20$$

Y se obtiene que

$$S\,(2) = (2)^3 - 12\,(2)^2 + 36\,(2) - 20 = 12$$

por tanto, las coordenadas del punto máximo son PM (2,12)



Del mismo modo, para determinar que tipo de punto critico (máximo o mínimo) es el que se encuentra en t = 6 seg., se sustituye por el valor de 't' un poco a la izquierda de t = 6 , por ejemplo, t = 5.9, y otro un poco a la derecha de t = 6, por ejemplo, t = 6.1 en la función derivada, como se muestra a continuación.

A partir de

$$S'(t) = 3t^2 - 24t + 36$$

para $t = 5.9$, se tiene que

$$S'(5.9) = 3\,(5.9)^2 - 24\,(5.9) + 36 = -1.17$$

y como es un valor negativo de la derivada, significa que la pendiente es negativa y la función en ese instante es decreciente.

Así también, para $t = 6.1$, se tiene que

$$S'(6.1) = 3\,(6.1)^2 - 24\,(6.1) + 36 = 1.23$$

y como es un valor positivo de la derivada, entonces, la pendiente de la tangente a la curva es positiva y la función es creciente.

En conclusión, como la función primero decrece (en $t = 5.9$) y luego crece (en $t = 6.1$), entonces, el punto critico encontrado en $t = 6$ es un mínimo.

Para calcular el punto mínimo se sustituye $t = 6$ en la función original (sin derivar).

$$S(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 20$$

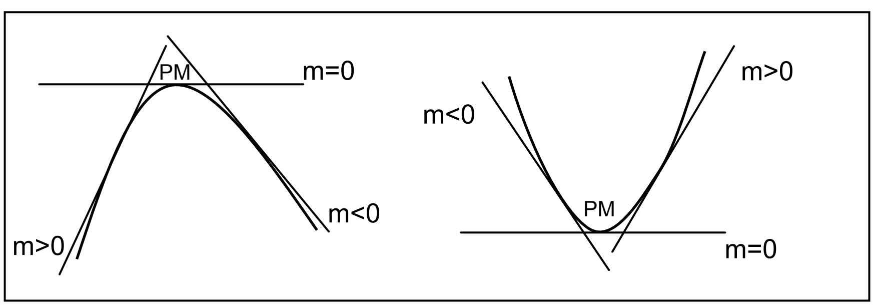
y se obtiene que

$$S(6) = (6)^3 - 12\,(6)^2 + 36\,(6) - 20 = -20$$

Por tanto, las coordenadas del punto mínimo son Pm (6,–20).

(Observa la gráfica anterior).

Las siguientes gráficas te ayudaran a concretar tus ideas.



Si $m > 0$, entonces, $f'(x) > 0$ y la función es creciente

Si $m < 0$, entonces, $f'(x) < 0$ y la función es decreciente.

Si $m = 0$, entonces, $f'(x) = 0$ y la función no crece ni decrece, se trata de un máximo o un mínimo

2.1.4 PUNTOS DE INFLEXIÓN

Para la función derivada del problema anterior

$$S'(t) = 3t^2 - 24t + 36$$

Termina de llenar la tabla siguiente:

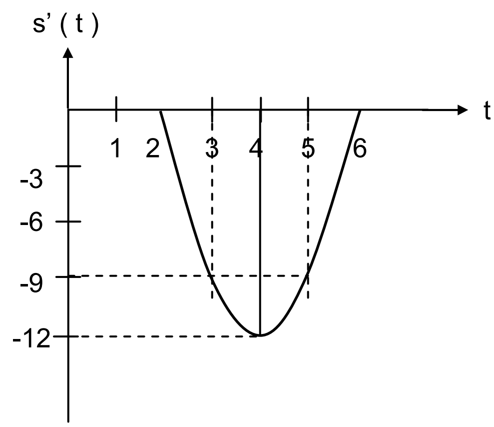
t	2	3	3.5	3.8	3.9	4	4.1	4.2	4.5	5	6
S'(t)			-11.25		-11.97	12		-11.88		-9	

¿Cuál es el valor más pequeño de la derivada S' (t)?

¿Para que valor de 't' sucede esto?

Pues bien, existe entre un punto máximo y un punto mínimo, otro punto en donde la derivada tiene ya sea el máximo valor o el mínimo valor. A dicho punto se le llama punto de inflexión.

La gráfica de la función derivada es la que se muestra a continuación



Puesto que la gráfica presenta simetría respecto al valor de t = 4, se puede decir que existe un punto de inflexión allí mismo, en t = 4. (consulta el tema de funciones cuadráticas en el fascículo 2 de matemáticas II).

a) Criterio de la Segunda Derivada para la Obtención de los Puntos de Inflexión

Como pudiste observar en la gráfica anterior, el punto de inflexión se presenta cuando la derivada de la función tiene un mínimo, aunque puede ser un máximo, como ya se dijo.

Entonces, se aplicará el criterio de la primera derivada sobre la función derivada, S' (t), para hallar el máximo o el mínimo valor de dicha función derivada (consulta el criterio de la primera derivada).

Como el criterio de la primera derivada indica que se debe derivar la función en estudio, y dicha función es ya una función derivada, entonces, se tiene la derivada de una derivada, y de aquí que se le llame como: 'criterio de la segunda derivada'.

De este modo, al derivar la función derivada

$$S'(t) = 3t^2 - 24t + 3$$

Se obtiene que

$$S''(t) = 6t - 24$$

Al igualar a cero esta ultima derivada, resulta que

$$6t - 24 = 0$$

y al despejar 't ' queda

$$t = \frac{24}{6}$$

o sea

$$t = 4$$

que es justamente el valor de 't' en donde la derivada S' (t) tiene un valor extremo (mínimo), es decir, es el valor de 't' en donde se presenta el punto de inflexión (o puntos de inflexión si 't' tomara varios valores).

Para hallar la abscisa del punto de inflexión, se sustituye t = 4 en la función original

$$S(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 20$$

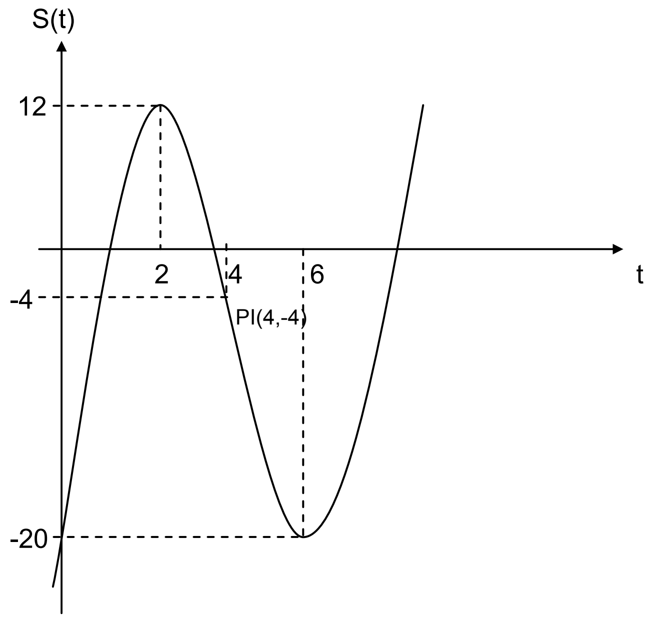
así

$$S(4) = (4)^3 - 12(4)^2 + 36(4) - 20$$

o bien

$$S(4) = -4$$

Por lo que el punto de inflexión se encuentra en PI (4,–4)



Como puedes apreciar, la concavidad de la curva antes del punto de inflexión es negativa y después del punto de inflexión es positiva.

DEFINICIÓN

PUNTO DE INFLEXIÓN. Es un punto sobre la curva f (x), en donde la curva cambia la concavidad.

b) Concavidad y Convexidad

A partir de la segunda derivada de la función del problema anterior,

$$S''(t) = 6t - 24,$$

Completa la siguiente tabla.

t	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
S''(t)		-9	-6		0	3			12

Como puedes observar, la segunda derivada de la función antes del punto de inflexión, ($t = 4$), es negativa, lo que quiere decir, que la concavidad de la curva es negativa en ese intervalo ($-\infty < t < 4$). Así también, la segunda derivada de la función después del punto de inflexión, es positiva, lo que quiere decir, que la concavidad de la curva es positiva en ese intervalo ($4 < t < \infty$).

Definiciones

CONCAVIDAD. Se dice que una función es cóncava cuando su concavidad es positiva, es decir, cuando la segunda derivada de la función es positiva.

CONVEXIDAD. Se dice que una función es convexa cuando su concavidad es negativa, es decir, cuando la segunda derivada de la función es negativa

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

1. Para cada una de las siguientes funciones encuentra, utilizando los criterios de la primera y de la segunda derivada:

   Los intervalos en donde la función es creciente.

   Los intervalos en donde la función es decreciente.

   Los puntos extremos (máximos y/o mínimos).

   Los puntos de inflexión.

   Los intervalos en donde la función es cóncava.

   Los intervalos en donde la función es convexa.

   Haz una gráfica aproximada de cada una de las siguientes funciones, sin tabular.

   a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$

   b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$

   c) $f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 3x$

   d) $f(x) = (x + 3)(x - 2)$

2. Para cada una de las siguientes funciones encuentra lo mismo que se te pidió en los problemas anteriores.

   a) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 2$

   b) $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 12x$

   c) $f(x) = 2x^3 - 6x - 9$

   d) $f(x) = (x + 1)(3 - x)$

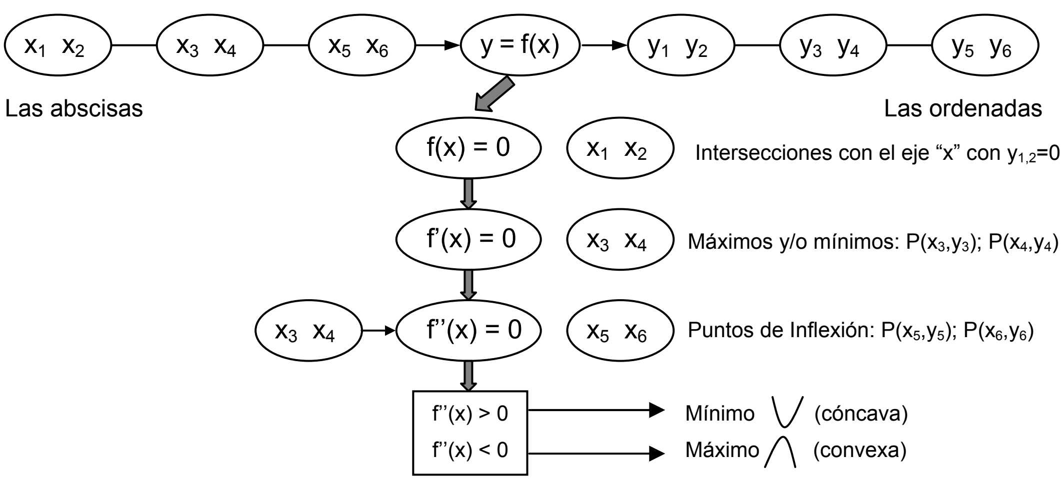
EXPLICACIÓN INTEGRADORA

En este tema has aprendido a:

Analizar la forma en que varían las funciones a través del estudio de sus gráficas y mediante la nueva herramienta que has adquirido llamada ‘derivada’, la cual puede ayudarte a obtener información más amplia y precisa.

El siguiente diagrama de flujo muestra los pasos que debes seguir para obtener, dada una función f(x), los máximos y mínimos, los puntos de inflexión, las intersecciones con el eje “x” y sus respectivas ordenadas, además de la concavidad o convexidad de la gráfica de la función.
Observa que las “x” representan los valores de entrada, mientras que las “y” representan los valores de salida.

Sigue las flechas.



2.2 ECUACIONES DE LAS RECTAS TANGENTE Y NORMAL

Cuando estudiaste geometría analítica (Matemáticas IV) seguramente te encontraste con el problema de hallar las ecuaciones de las rectas, tangente y normal a una curva en un punto determinado. Pues bien, en esta sección podrás obtener dichas ecuaciones utilizando la derivada de la función.

Ejemplo.

Sea la ecuación de una parábola $y = x^2 - x - 6$

Nos interesa encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a dicha curva en el punto P(2,–4).

Como la derivada de la función representa la pendiente de la recta tangente a la curva en cualquiera de sus puntos, entonces, empezaremos por obtener dicha derivada.

Así $y' = 2x - 1$

Y como el punto en donde nos interesa obtener las ecuaciones de las rectas tangentes y normal es p(2,–4), que tiene como abscisa el valor de x = 2, entonces el valor de la derivada de la función en x = 2 es

$$\begin{aligned} f'(2) &= 2(2) - 1 \\ &= 4 - 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Por tanto, la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto dado es $m = 3$

Debes recordar que las ecuaciones de las rectas tangente y normal son:

$y - y_1 = m(x - x_1)$ Ecuación de la recta tangente

$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$ Ecuación de la recta normal

en donde 'm' representa la pendiente de la recta tangente, y los valores x_1 e y_1 representan las coordenadas del punto de tangencia (que en nuestro problema esta dado por el punto p).

De este modo, al sustituir los datos que tenemos en las ecuaciones anteriores, resulta:

a) para la ecuación de la recta tangente

$$y + 4 = 3\,(x - 2)$$

ó $$y + 4 = 3x - 6$$

o sea $$y = 3x - 10$$

o bien $$3x - y - 10 = 0$$

b) para la ecuación de la recta normal

$$y + 4 = -\frac{1}{3}\,(x - 2)$$

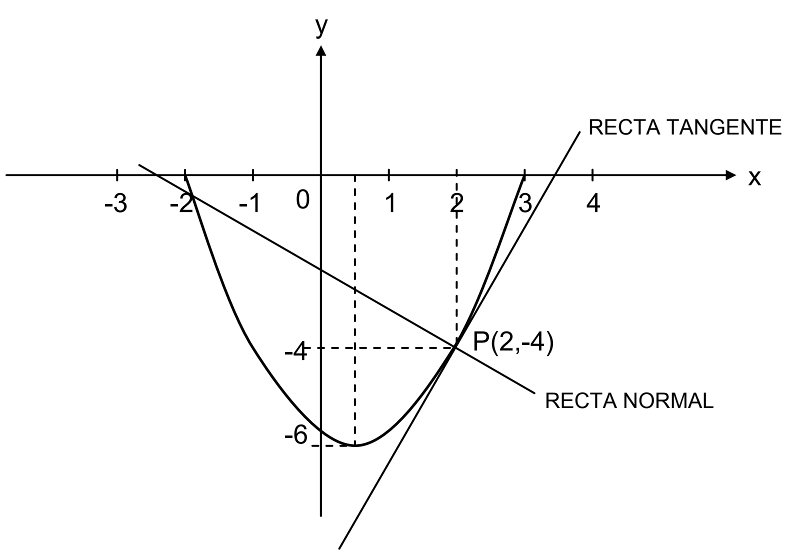
al multiplicar la ecuación anterior por 3, queda.

$$3y + 12 = -\,(x - 2)$$

o bien $$3y + 12 = -x + 2$$

o también $$x + 3y + 10 = 0$$

La gráfica es como a continuación se muestra



ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

1. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangente y normal para cada una de las siguientes funciones y en los puntos que se indican.

   a) $f(x) = x^2 + x - 6$ en $x = 3$

   b) $f(x) = x^2 + 3x - 4$ en $x = -2$

   c) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 2$ en $x = -1$

2. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangente y normal para cada una de las siguientes funciones y en los puntos que se indican.

   a) $f(x) = x^2 - 4$ en $x = 0$

   b) $f(x) = x^2 - x - 20$ en $x = -3$

   c) $f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 3$ en $x = 1$

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

Uno de los problemas que motivó la invención del cálculo fue el problema relativo a la tangente a una curva en un punto dado.

Anteriormente aprendiste que la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto $P(x_1,f(x_1))$ tiene pendiente $m = f'(x_1)$. Con este conocimiento la ecuación de la tangente se obtiene fácilmente, pues conocemos: a) Las coordenadas de un punto $P(x_1,f(x_1))$ y b) la pendiente $m = f'(x_1)$.

Así la ecuación de la recta tangente es: $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$

La normal a la curva en el punto $P(x_1,f(x_1))$ es perpendicular a la tangente, por lo tanto su pendiente es recíproca y de signo contrario, es decir $-\dfrac{1}{f'(x_1)}$.

Por lo tanto, la ecuación de la recta normal es: $y - f(x_1) = -\dfrac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$

2.3 PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN Y RAZÓN DE CAMBIO

Ejemplo.

El director de una determinada empresa editorial ha observado que si fija el precio de un determinado libro $20, vende 10,000 ejemplares. Pero por cada peso que incrementa el precio, las ventas disminuyen en 400 copias. ¿Qué precio deberá fijar el editor a cada libro, de manera que el ingreso para la empresa por la venta de estos libros sea máximo? ¿Cuál es el valor de dicho ingreso?

Planteamiento.

¿Cómo crees que se calculan los ingresos?

Los ingresos se calculan multiplicando el precio de articulo vendidos, así

$$I = (20)\,(10000), \qquad \text{donde} \quad I = \text{ingreso}$$

Supongamos que 'x' representa el numero de pesos en que se incrementa el precio del libro, entonces.

$20 + x$	es el nuevo precio del libro
$400\,x$	es el número de copias que dejan de venderse por cada peso que aumenta el precio
$10{,}000 - 400x$	es el nuevo numero de ejemplares vendidos.

Entonces, la función que representa el ingreso en términos del numero de pesos en que se aumenta el precio del libro, es

$$I\,(x) = (20 + x)\,(10{,}000 - 400x)$$

Esta función, $I(x)$, recibe el nombre de función objetivo, porque es la función que se requiere optimizar.

Solución

Ahora, se debe aplicar el criterio de la primera derivada; se deriva y se iguala a cero la función resultante.

La derivada de la función $I(x)$, es

$$I'\,(x) = (1)\,(10{,}000 - 400x) - 400\,(20 + x)$$

o sea $$I'\,(x) = 10{,}000 - 400x - 8{,}000 - 400x$$

o bien $I'(x) = -800x + 2000$

Al igualar a cero, resulta que $-800x + 2,000 = 0$

o bien $-800x = -2000$

o también $x = \dfrac{-2000}{-800}$

y por tanto

$$\mathbf{x = \$\ 2.5}$$

Que representa el número de pesos en que se debe incrementar el precio del libro para obtener el máximo ingreso.

De esta manera, al incrementar el precio de venta del libro en $2.5, se obtiene el máximo ingreso. Para calcular el ingreso máximo se sustituye x = 2.5 en la función objetivo, y resulta

$$I(2.5) = (20 + 2.5)\,[10,000 - 400\,(2.5)]$$

o

$$I(2.5) = (22.5)\,(10,000 - 1000)$$

o bien $I(2.5) = (22.5)\,(9,000)$

por tanto $I(2.5) = \$\ 202,500.00$

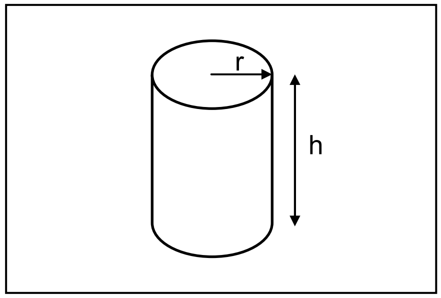
Que representa el máximo ingreso.

Ejemplo.

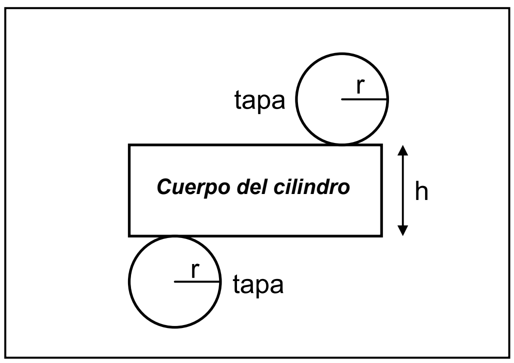
En una fábrica de artículos de fibra de vidrio, se desea construir un recipiente cilíndrico, con tapa, que tenga capacidad de un metro cúbico. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de dicho recipiente para que la cantidad de material empleado en su construcción sea mínima?

Planteamiento.

El recipiente tiene la siguiente forma



Pero, si pudiera desenvolverlo quedaría así



Y, el área del recipiente seria la suma del área del cuerpo del cilindro más el área de las dos tapas

$$A = \square + 2\bigcirc$$

Solución.

Cálculo del área del cuerpo del cilindro:

Como el largo del rectángulo es igual a la longitud de la circunferencia, $c = 2\pi r$, y su altura es 'h', entonces, el área del rectángulo (A = base x altura) queda así

$$A_{\square} = 2\pi r h$$

Calculo del área de las dos tapas:

Como las tapas tienen forma circular, entonces,

$$A = \pi r^2$$

y por tratarse de dos tapas

$$A = 2\pi r^2$$

así el área total es

$$A = 2\pi r h + 2\pi r^2 \qquad \text{(función objetivo)}$$

Como la función objetivo esta en términos de dos diferentes variables,"r" y "h", es necesario convertir dicha función en términos de una sola variable y así poder derivarla fácilmente.

Como el volumen que se desea en el recipiente es de $1\, m^3$, y el volumen de un cilindro esta dado por la fórmula.

$$V = \pi r^2 h,$$

Entonces,

$$\pi r^2 h = 1$$

o sea

$$h = \frac{1}{\pi r^2} \text{ ----------- a)}$$

ahora, se sustituye la ecuación a) en la función objetivo y así, dicha función, queda en términos de una sola variable, "r".

Así

$$A(r) = 2\pi r \left(\frac{1}{\pi r^2}\right) + 2\pi r^2$$

o sea

$$A(r) = \frac{2}{r} + 2\pi r^2$$

Al derivar esta última función resulta que

$$A'(r) = \frac{-2}{r^2} + 4\pi r$$

Y, al igualar a cero, queda que

$$\frac{-2}{r^2} + 4\pi r = 0$$

Ahora, para eliminar el denominador, r^2, se multiplica toda la ecuación por "r^2"

$$\left[\frac{-2}{r^2} + 4\pi r = 0 \right] r^2$$

o sea que

$$-2 + 4\pi r^3 = 0$$

ó

$$4\pi r^3 = 2$$

ó bien

$$r^3 = \frac{2}{4\pi}$$

ó también

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$$

Y como $\pi = 3.1416$, entonces,

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2(3.1416)}}$$

o sea que

$$\underline{r = 0.542}$$

Y, para calcular "h" se sustituye $r = 0.542$ en la ecuación a), como se muestra a continuación.

$$h = \frac{1}{\pi(0.542)^2}$$

ó sea

$$h = \frac{1}{(3.1416)(0.542)^2}$$

así que

$$\underline{h = 1.08 \text{ m}}$$

La medida para ocupar la mínima cantidad de material es:

$$r = 0.542 \text{ m} \quad y \quad h = 1.08 \text{ m}$$

¿Cómo puedes estar seguro de que con estas medidas se obtiene un mínimo, y no un máximo?

Se puede aplicar el criterio de la segunda derivada a partir de:

$$A' = \frac{-2}{r^2} + 4\pi\, r$$

se deriva nuevamente, y entonces,

$$A''(r) = \frac{4}{r^3} + 4\pi$$

Y, como r = 0.542, se sustituye dicho valor en esta última ecuación. De modo que

$$A''\,(0.542\,) = \frac{4}{(0.542)^3} + 4\,\pi$$

y después de resolver las operaciones indicadas, resulta que.

$$A''\,(0.542) = 37.69$$

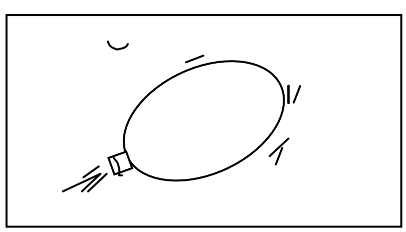
Como el resultado es positivo, entonces, la concavidad de la curva, A´ (r), también es positiva, y el punto en cuestión es un mínimo.

¿Que significado tendría el que la segunda derivada fuera negativa?

Ejemplo.

El gas de un globo esférico se escapa a razón de 1,000 cm^3/min en el mismo instante en que el radio es de 25 cm.

a) ¿Con qué rapidez disminuye el radio?
b) ¿Con qué rapidez disminuye el área de la superficie?



Planteamiento

Como el aire escapa a razón de 1,000 cm^3/min, quiere decir que la razón de cambio del volumen del globo respecto al tiempo es de 1,000.

Así, te das cuenta de que se requiere de la fórmula del volumen de una esfera, que es

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Al derivar respecto a " t ", resulta que

$$\frac{dv}{dt} = 3(\frac{4}{3})(\pi r^2)(\frac{dr}{dt})$$

en donde dv es la razón de cambio del volumen respecto al tiempo, y dr es la razón de cambio del radio respecto al tiempo, que es precisamente lo que se pide calcular.

Solución

Entonces,

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi\ r^2 \frac{dr}{dt}$$

y como, según los datos del problema

$$\frac{dv}{dt} = 1000 \quad y \quad r = 25$$

resulta que

$$1{,}000 = 4\pi\ (25)^2 \frac{dr}{dt}$$

o sea

$$\frac{1000}{4\pi(25)^2} = \frac{dr}{dt}$$

Así,

$$\frac{dr}{dt} = 0.1273 \text{ cm/min.}$$

que es la rapidez con que disminuye el radio.

Para hallar la rapidez con que disminuye el área de la superficie del globo se requiere de la fórmula

$$A = 4\pi r^2$$

Que es el área de la superficie de una esfera.

Y, como se pide $\frac{dA}{dt}$, se deriva la fórmula del área y queda

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$$

además, como el valor de $\frac{dr}{dt}$ ya se había calculado, entonces

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi r(0.1273)$$

y como r = 25, se tiene que

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi (25)(0.1273)$$

de modo que

$$\underline{\frac{dA}{dt} = 80cm^2/\min}$$

Que es la rapidez con que se disminuye el área de la superficie del globo.

Ejemplo.

Para alcanzar una pelota que se encuentra a 12 metros de altura, un delfín sale del agua y se dirige verticalmente hacia arriba con una velocidad de 16 m/s. La posición del delfín h (t) (en metros) sobre la superficie del agua después de "t" segundos esta por dada h (t) = 16 t – 4.9t².

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

Contesta las siguiente preguntas con base al problema del delfín.

¿Cuál es la velocidad y la aceleración del delfín a los "t" segundos?

¿Cuál es la velocidad y la aceleración del delfín justamente en t = 1 seg.?

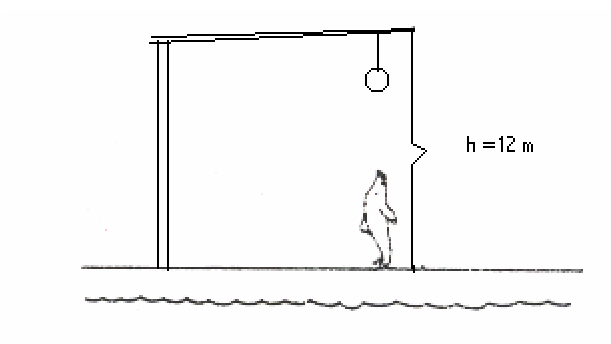
¿Cuál es la altura máxima que alcanza el delfín?

¿Alcanza el delfín la pelota?

¿En que instante toca el delfín la pelota?

¿ En que instante toca el delfín la pelota?

¿Cuánto tiempo dura el salto del delfín?



Para resolver este problema se debe tener presente que si "h (t)" presenta la posición en términos de "t", entonces, h´(t) es la razón de cambio de la posición en términos de tiempo, es decir h´(t) es la velocidad del delfín en términos de ´t´ y h´´(t) h´´ (t) es la aceleración del delfín en términos de ´t´.

En síntesis :

h (t) : representa la posición del delfín.
h´(t) = v(t) : representa la velocidad del delfín.
h´´(t) = v´(t) =a (t) : representa la aceleración del delfín

A partir de

$$h(t) = 16t - 4.9t^2 \quad (m) \qquad \text{(posición en un tiempo ´t´)}$$

se tiene que

$$h'(t) = v(t) = 16 - 9.8t \quad (m/s) \qquad \text{(velocidad en un tiempo ´t´)}$$

y también

$$h''(t) = a(t) = -9.8 \quad (m/s^2) \qquad \text{(aceleración en un tiempo ´t´)}$$

así que, si t = 1 seg.

$$h'(1) = v(1) = 16 - 9.8\,(1)$$

y

$$\underline{h'(1) = v(1) = 6.2 \text{ m/s}}$$

que es la velocidad del delfín al cabo del primer segundo, además,

$$\underline{h''(1) = v(1) = a(1) = -9.8 \text{ m/s}^2.}$$

que es la aceleración del delfín sin importar el instante ´t´ en el que sea medida.
¡Es precisamente el valor de la aceleración de la gravedad! ¿Te diste cuenta?

Para calcular la altura máxima, a partir de:

$$h'(t) = 16 - 9.8\,t$$

se iguala a cero, y resulta $16 - 9.8t = 0$

y se despeja 't', así $16 = 9.8\,t$

y $\dfrac{16}{9.8} = t$

por tanto $t = 1.633$ seg.

Que es el tiempo que tarda el delfín en alcanzar la altura máxima.

Al sustituir $t = 1.633$ en ´h (t)´se obtiene la altura máxima

$$h(1.633) = 16\,(1.633) - 4.9\,(1.633)^2$$

o sea que

$$h\,(1.633) = 13.06 \text{ m.}$$

Se puede apreciar que el delfín sí alcanza la pelota, además como el tiempo de ascenso para el delfín es de $t = 1.633$ seg. el tiempo que le lleva su descenso es el mismo, 1.633 seg., por lo que el tiempo que dura todo el salto es de 3.266 seg.

Para hallar el instante en que el delfín toca la pelota, se sustituye $h = 12$ en la función $h\,(t)$ y resulta que:

$$12 = 16\,t - 4.9\,t^2$$

al igualar a cero la expresión, resulta que

$$4.9t^2 - 16\,t + 12 = 0$$

que es una ecuación de segundo grado, y al resolverla se obtienen los valores de ‘t.’

$$t_1 = 2.1 \text{ seg.}$$
$$t_2 = 1.17 \text{ seg.}$$

¿Cuál de estos dos valores es el correcto?

¿Qué interpretación les das?

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

I. Obtén la solución de los siguientes problemas.

1) Encuentra dos números positivos cuya suma sea 100 y su producto sea máximo

2) Encuentra dos números cuya suma sea 50 y tales que la suma de sus cuadrados sea mínima

3) El ingreso mensual por concepto de la venta de ‘x’ unidades de cierto artículo esta dado por $R(x) = 12x - 0.01x^2$ pesos. Encuentra el número de unidades que deben venderse cada mes con el propósito de maximizar los ingresos. ¿cuál es ese ingreso máximo?

4) En una fábrica de conservas necesitan botes cilíndricos con una capacidad de un litro. Calcula las dimensiones de dicho bote (radio y altura) de manera que en su construcción entre la menor cantidad de material posible.

5) Se requiere construir un rectángulo con un trozo de alambre que tiene una longitud de 1 metro de manera que se forme un rectángulo e la mayor área posible. ¿cuál es deben ser las dimensiones de los lados?

6) Un tanque de aceite que tiene forma de un cilindro circular con un radio de 8 m, se llena constantemente a razón de 10 m^3 /min. ¿Con qué rapidez sube el nivel del aceite?

7) Se quiere construir una caja cerrada que tenga una base cuadrada y una capacidad de 5000 cm^3. si el costo de la base y de la tapa es de \$ 6.00 por cada cm^2 y el costo de los lados es de \$ 2.00 por cada cm^2. Determina las dimensiones que debe tener la caja para que sea construida con un costo mínimo.

8) Una compañía de bienes raíces es dueña de 180 departamentos que se ocupan en su totalidad cuando la renta es de \$ 3,000.00 mensuales. La compañía calcula que por cada \$ 100.00 de aumento en la renta se desocupan 5 departamentos. ¿cuál debe ser la renta mensual para que la compañía obtenga el máximo ingreso?

9) Un tanque tiene la forma de un cono invertido. La altura de dicho tanque es de 16 pies y el radio de su base es de 4 pies. Una llave de agua llena el tanque a razón de 2 pies ^{3}/min. ¿qué tan rápido crece el nivel cuando el agua tiene 5 pies de profundidad?

10) Se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con una velocidad inicial de 112 m/s. Si se sabe que la ley del movimiento es de $S = 112t - 4.9\,t^2$, en donde 'S' es la distancia al punto de partida, calcula:

a) La velocidad y la aceleración en los instantes $t = 3$ y $t = 4$.
b) La máxima altura alcanzada
c) El tiempo que tarda en llegar a una altura de 96 m.
d) La aceleración en cualquier instante

11) Encuentra dos números reales positivos cuya suma sea 40 y su producto sea máximo.

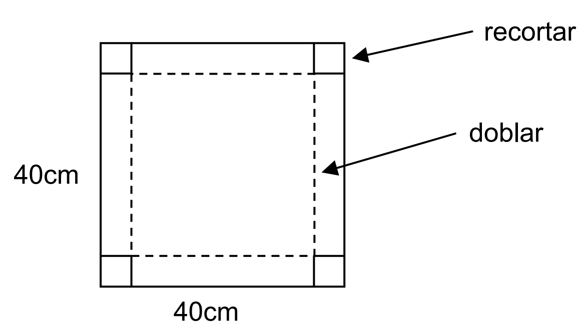
12) Encuentra dos números cuyo producto sea 16 y cuya suma sea mínima

13) De entre todas las latas cilíndricas de hojalata con capacidad de 100 cm^3 ¿cuál es la que requiere menos metal? (Encuentra 'r' y 'h').

14) Si el número de turistas que hacen un recorrido en autobús a una determinada ciudad es de 30, exactamente, la empresa cobra $200 por persona. Por cada persona que se suma a las 30, el costo por persona se reduce en $5. ¿cuál es el número óptimo de turistas que el autobús debe llevar para que la empresa obtenga el máximo beneficio?

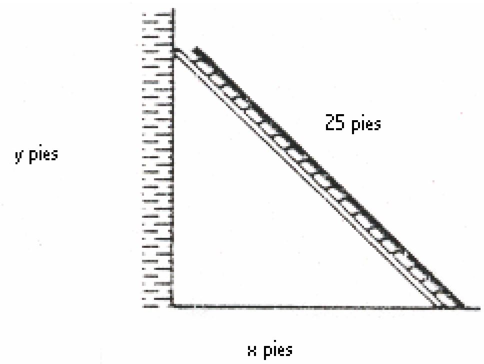
15) Un alambre de 60 cm. De largo se parte en dos pedazos. Con una de las partes formará un círculo y con la otra se formará un triangulo equilátero. ¿cuál debe ser la longitud de cada uno de estos pedazos para que la suma de las áreas de las dos figuras sea máxima? ¿y para que sea mínima?

16) De una pieza cuadrada de cartón se va a formar una caja abierta en su parte superior, y para ello se recorta un pequeño cuadrado en cada una de las esquinas y posteriormente se doblan sus bordes. El cartón mide 40 cm. Por cada lado.

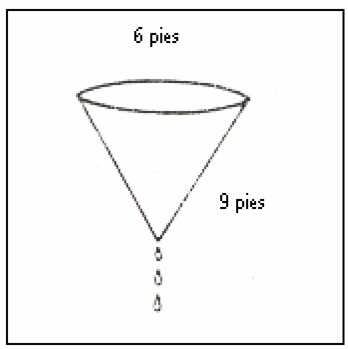


Encuentra las dimensiones de la caja de modo que se obtenga el volumen máximo.

17) Una escalera de 25 pies de largo se apoya contra una pared vertical. Si la base de la escalera se desliza horizontalmente, alejándose de la pared a 3 pies/seg. ¿qué tan rápido se desliza la parte superior de la escalera, cuando la base se encuentra a 15 pies de la pared?



18) El agua escapa por la parte inferior de un depósito cónico a razón de 1 pie^3/min. ¿Conque rapidez varia el nivel del agua cuando su altura sobre el fondo es de 6 pies?



¿A que razón cambia el radio de la superficie del agua en ese instante?

19) Desde un tejado de 112 m de altura, se lanza verticalmente hacia arriba una pelota que, finalmente, regresa al suelo. Si se sabe que el espacio ‘S’ recorrido desde el tejado es $S = 96t - 16t^2$ (m), calcula:

a) La posición de la pelota, su velocidad y el sentido del movimiento en el instante $t = 2$.
b) Su velocidad al llegar al suelo.

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

La derivada nos permite resolver toda una gama de problemas de optimización como maximizar ganancias, minimizar la cantidad de material empleado para fabricar un producto y para calcular razones de cambio como velocidad, aceleración, etc.

Para resolver un problema, se necesita:

1. Comprender el problema. En esta fase se identifican los datos, las incógnitas y las condiciones.

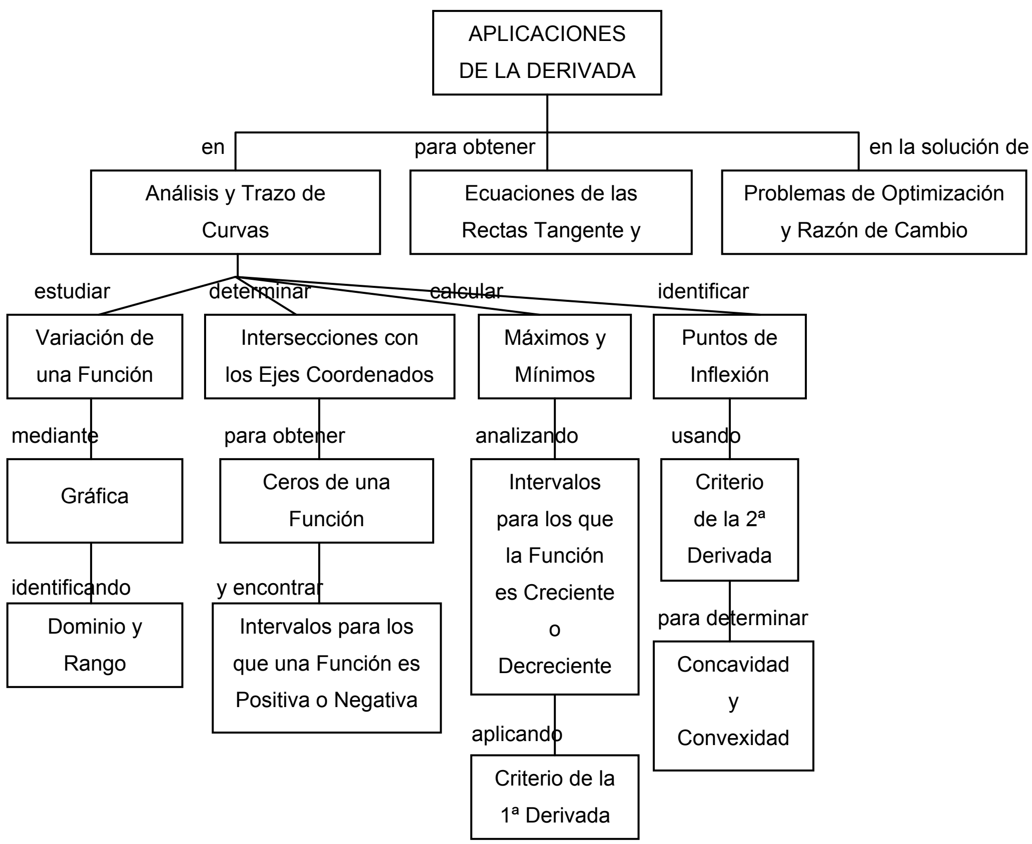
2. Elaborar un plan, para lo cual se determina la relación entre los datos y la incógnita, se formula el modelo matemático y se establecen los pasos a seguir, incluyendo la aplicación de los conceptos del Cálculo Diferencial.

3. Ejecutar el plan.

4. Verificar la solución obtenida.

RECAPITULACIÓN

Has concluido el estudio del capítulo 2 “aplicaciones de la derivada”, analiza el siguiente esquema en donde se muestran los conceptos que se abordaron para ayudarte a organizar los conocimientos que has ido construyendo.



ACTIVIDADES INTEGRALES

Con el objeto de reafirme tus conocimientos, resuelve los siguientes problemas:

1 En un determinado huerto, el agricultor planta manzanos con una densidad de 30 manzanos por acre, y el valor de la cosecha producida por cada árbol es de $100.00.si además se sabe que por cada árbol extra que se plante en un acre el valor de la cosecha disminuye en $3.00, entonces, se podrían plantear las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el número de árboles que deben plantarse por acre con el objeto de obtener el máximo valor de la cosecha?

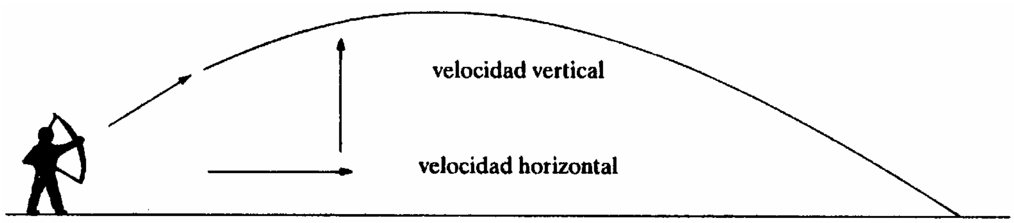
b) ¿Cuál es el valor máximo de la cosecha?

c) ¿Cuál debe ser el intervalo de variación del número de manzanos extra plantados para que el problema tenga sentido?

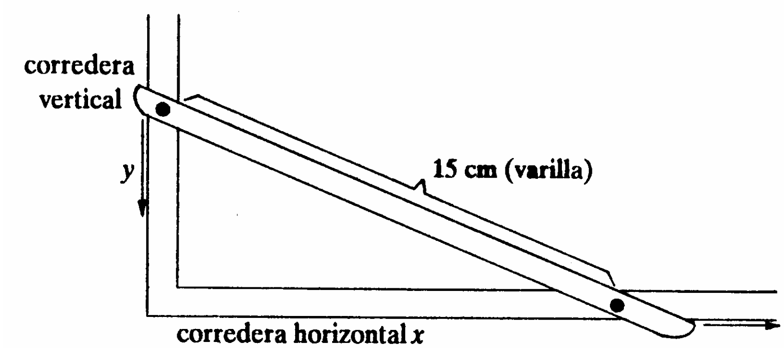
d) ¿Cuál es el intervalo de variación para el valor de la cosecha que es posible en este problema?

2 Un atleta olímpico dispara una flecha con una velocidad vertical de 35m/s. Se sabe que la flecha se encontrará a una altura sobre el suelo de h (t) = $-4.9t^2 + 35t$, "t" segundos después del disparo, entonces, se pregunta lo siguiente:

a) ¿Cuánto tiempo se tarda el proyectil en llegar al suelo?
b) ¿Con qué velocidad vertical llega al suelo la flecha?
c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?
d) ¿A que velocidad vertical viaja la flecha al cabo de 3, 5 o 7seg. ?
e) ¿Cuál es la aceleración vertical que experimenta la flecha al cabo de 3, 5 o 7seg.?



3 Uno de los extremos de una varilla sé 15 cm. de longitud se encuentra unida en sus extremos a dos correderas, una vertical y otra horizontal.



Si se jala la corredera interior hacia la derecha a razón de 09.3 cm/s. Entonces:

a) ¿Con qué velocidad baja el extremo superior de la varilla cuando su extremo inferior se encuentra alejado de la corredera vertical a una distancia de 4 cm.?
b) ¿Cuándo se moverán con la misma velocidad los dos extremos de la varilla?
c) ¿Cuándo baja el extremo superior de la varilla a razón de 1.2 cm./ seg.?

AUTOEVALUACIÓN

Compara las respuestas que obtuviste en las actividades de consolidación con los valores que enseguida se te muestran,

En caso de que tengas dudas consulta con tu asesor de contenido.

1) a) (30 + 5/3) árboles o bien 32 árboles.
   b) \$3,008 /acre
   c) $0 < x < 33$; x = número de manzanos adicionales
   d) $66 < y < 3{,}008$; y = valor de la cosecha en (\$).

2)
   a) $t = 7.14$ seg.
   b) $h´(7.14) = –35$m/s.
   c) $h´(3.57) = 62.5$ m.
   d) $h´(3) = 5.6$m/s.
      $h´(5) = 14$ m/s.
      $h´(7) = –33$ m/s.
   e) $h´´(t) = –9.8$ m/s^2

3)
   a) $dy = –0.25$ cm/s.
   b) cuando $x = y$
   c) cuando $x = 12$ cm. e $y = 9$ cm.

CAPÍTULO 3

LÍMITES

3.1 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

3.1.1 Límites por la Derecha y por la Izquierda

3.1.2 Límite de una Función *f(x)* Cuando la Variable Independiente *x* Tiende a un Número Real a ($x \to a$)

3.1.3 Casos en los que el Límite no Existe

3.2 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

3.2.1 Función Continua

3.2.2 Técnicas Algebraicas para Calcular Límites
- a) Límites de Funciones Polinomiales
- b) Límites de Funciones Racionales
- c) Propiedades de los Límites

3.2.3 Los Límites y el Infinito
- a) Funciones que Crecen o Decrecen sin Cota
- b) Asíntotas Verticales
- c) Límite de una Función Cuando la Variable Independiente Tiende a Infinito
- d) Asíntotas Horizontales
- e) Límites de Algunas Funciones Trascendentes

PROPÓSITO

Como ya has visto, la derivada es un límite. A lo largo de los capítulos anteriores has manejado de una manera intuitiva la idea de límite, pero el concepto de límite es muy importante ya que por el se distingue el cálculo de otras ramas de las matemáticas que habías estudiado previamente.

Las siguientes preguntas te orientarán sobre los contenidos de este capítulo, la forma en que los abordarás y la utilidad que te brindarán.

¿Qué voy a aprender?	¿Cómo lo voy a lograr?	¿Para qué me va a servir?
• Una idea más amplia del límite de una función en diversas situaciones. • Técnicas algebraicas para calcular los límites y el infinito. • Límites de algunas funciones trascendentes y la noción de continuidad.	• Partiendo de la idea intuitiva de lo que ocurre con la variable dependiente de una función cuando el valor de la variable independiente se acerca más y más a un valor determinado o bien, crece o decrece cada vez más. • Aplicando tus conocimientos de álgebra.	• Para tener más elementos para explorar el comportamiento de las funciones que obtienes al modelar situaciones de problemas. • Sentar las bases para el estudio del Cálculo Integral.

CAPÍTULO 3

LÍMITES

3.1 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

En este capítulo se intenta precisar el concepto de limite mediante tres ejemplos en "los que intervienen funciones con diferentes comportamientos, se examina un caso en el que no existe el límite y se analiza la relación de los límites con la continuidad.

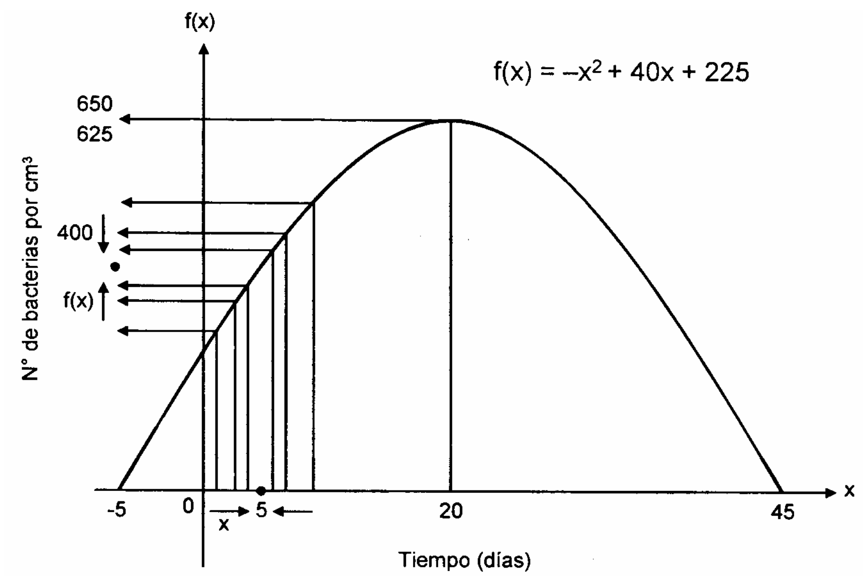
3.1.1 LÍMITES POR LA DERECHA Y POR LA IZQUIERDA

En el siguiente ejemplo se necesita saber cómo la variable tiempo influye en el número variable de bacterias de una vacuna. La relación entre las variables está descrita por una función con "buen comportamiento".

Ejemplo.

Tomasito tiene una enfermedad crónica. Ningún medicamento lo ha sanado. El pediatra, Dr. Medina, le ha recetado una vacuna elaborada con sus propios gérmenes.
El laboratorio que hizo la vacuna indicó al médico que ésta tiene una fecha de caducidad de 5 días, a partir del momento de su elaboración, debido a que contiene una cantidad inicial de bacterias que se reproducen siguiendo un patrón tal, que en el tiempo x están presentes $f(x) = -x^2 + 40x + 225$ bacterias por cada centímetro cúbico. A medida que el número de días se aproxima a 5 la cantidad de bacterias se aproxima al límite de tolerancia del organismo humano.

El doctor quiere saber cuál es ese límite. Tiene una computadora y con ella obtuvo la siguiente gráfica.



Trataremos de hallar la solución al problema del Dr. Medina.

Para resolver problemas pueden emplearse diversas estrategias; por el momento nos apoyaremos en el análisis de la gráfica de la función que describe el crecimiento de la población de bacterias.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Observa la gráfica anterior y responde a las siguientes cuestiones:

1. La función $f(x) = -x^2 + 40x + 225$ es una función cuadrática, ¿cómo es su gráfica?

   ____

2. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica con el eje de las "x"?

   ____

3. ¿Qué valores son aceptables para el tiempo (x) en el contexto del problema que nos ocupa?

   ____

4. ¿En dónde tiene la gráfica un punto máximo o mínimo?

   ____

5. Describe cómo varía el número de bacterias presentes en cada cm^3 de la vacuna al variar el tiempo.

   ____

Verifica si tus respuestas coinciden con lo que se expone en seguida:

- La gráfica de $f(x) = -x^2 + 40x + 225$ es una parábola cóncava hacia abajo con vértice en el punto de coordenadas (20,625).
- Sus puntos de intersección con el eje "x" son (-5.0) y (45,0).
- Asignar valores negativos al tiempo (x), no tiene sentido; el valor mínimo aceptable para el tiempo es cero.
- La gráfica tiene un máximo en el punto (20,625) que es el vértice.
- En el momento inicial hay 225 bacterias por centímetro cúbico, el número máximo de bacterias por cm^3 se alcanza a los 20 días y después de 45 días la población de bacterias se habrá extinguido, pero a los cinco días se habrá llegado al número límite de bacterias que el organismo tolera.

El problema es averiguar cuál es ese número límite. Observando la gráfica podemos hacer una conjetura acerca del valor al que se aproxima f{x) cuando x se aproxima a 5 por la izquierda o por la derecha ¿cuál crees tú que es?, pero para tener más elementos de juicio, haremos algunos cálculos.

Tomemos valores del tiempo cada vez más cercanos a 5 días y calculemos el número de bacterias correspondiente, organizando la información en una tabla.

En la tabla siguiente nos aproximamos a 5 por la izquierda, esto es, con valores menores que 5 pero cada vez más cercanos a 5. Calcula los valores de f(x) que faltan en la tabla.

x (días)	4.5	4.9	4.99	4.999	$\rightarrow 5$
f (x) Num. de bacterias por cm^3		396.99	399.6999		

Según la tabla anterior, ¿a qué número se aproxima $f(x) = -x^2 + 40x + 225$ cuando x se aproxima a 5 por la izquierda?

El número 400 se dice que es el límite de f{x) cuando x se aproxima o tiende a 5 por la izquierda.

El enunciado anterior se puede abreviar

$$\lim_{x \to 5-} (-x^2 + 40x + 225) = 400$$

En la siguiente tabla te aproximarás a 5 por la derecha, esto es con valores mayores que 5, pero cada vez más cercanos a 5. (lee la tabla de derecha a izquierda).

Calcula los valores de f(x) que faltan en la tabla:

x (días)	$5 \leftarrow$	5.001	5.01	5.1	5.5
f (x) Num. de bacterias por cm^3			400.2999	402.99	

Según la tabla anterior, ¿a que número se aproxima $f(x) = -x^2 + 40x + 225$ cuando x se aproxima a cinco por la derecha?

El número 400 se dice que es el límite de f(x) cuando x se aproxima o tiende a 5 por la derecha.

El enunciado anterior se puede abreviar

$$\lim_{x \to 5+} (-x^2 + 40x + 225) = 400$$

Estos resultados apoyan la conjetura que habíamos hecho a partir de la observación de la gráfica, sin embargo, siendo estrictos el límite se debería demostrar rigurosamente, más no lo haremos en este curso.

Aquí vamos a introducir el término usual para designar a los límites por la izquierda o la derecha.

Limites laterales.

Los limites por la izquierda y por la derecha reciben el nombre de límites laterales.

3.1.2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN f(x) CUANDO LA VARIABLE INDEPENDIENTE x TIENDE A UN NÚMERO REAL a ($x \to a$)

En el ejemplo de Tomasito los límites cuando x se aproxima a 5 por la izquierda y cuando lo hace por la derecha son iguales, este resultado significa que:

El límite (a secas) de $f(x) = -x^2 + 40x + 225$ cuando x tiende a 5 es igual a 400.

Lo anterior se denota de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to 5}(-x^2 + 40x + 225) = 400$$

Si los límites por la izquierda y por la derecha no coincidieran, el límite no existiría, como sucede en otros casos que analizaremos posteriormente.

Con respecto al problema que nos ocupa, contesta a la siguiente pregunta:

¿Cuál es el límite de tolerancia del organismo al tipo de bacterias presente por centímetro cúbico en la vacuna?

Después de toda esta discusión, ¿qué sucedió con Tomasito?

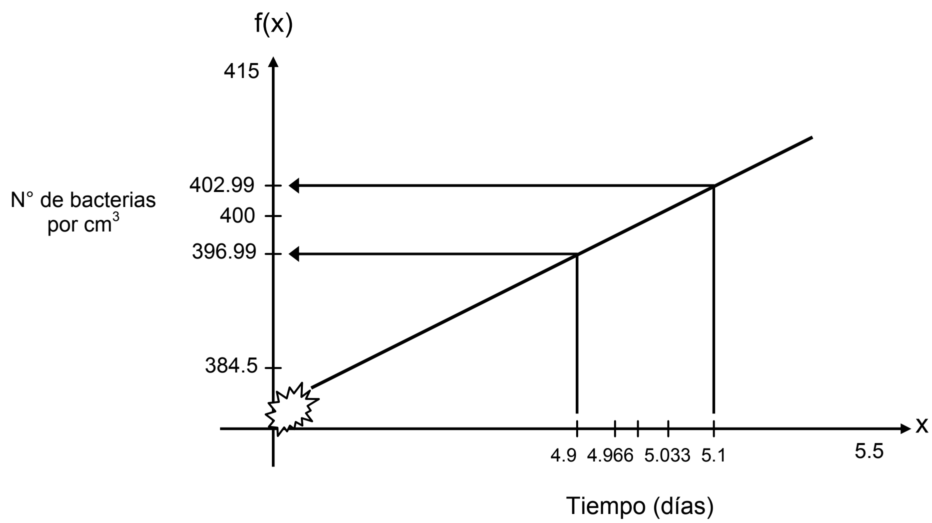
- El Dr. medina le administró la vacuna antes de su fecha de caducidad y el niño sanó completamente.

Con respecto al tratamiento matemático de nuestro problema, es importante hacer notar que si 400 es el límite, podemos hacer que el valor de la función f(x) esté tan cerca del límite de 400 como queramos, eligiendo valores adecuados para x.

Por ejemplo: de los datos de las tablas anteriores inferimos que si queremos que f(x) esté a una distancia de 400 menor que 0.4 unidades ya sea a la izquierda o a la derecha, podemos tomar $x>4.99$ y $x<5.01$ (pero no igual a 5), es decir, $4.99 < x < 5.01$, $x \neq 5$.

La gráfica de $f(x) = -x^2 + 40x + 225$ muestra la porción de la curva que corresponde a los valores de x en el intervalo [–5,45].

Es posible acercarnos a la zona de la gráfica que nos interesa, eligiendo convenientemente los valores de x. Por ejemplo, la siguiente figura es un acercamiento a la zona de la gráfica para valores de x entre 4.5 y 5.5 (se ha obtenido por medio de una computadora). Podemos acercarnos a esa región tanto como lo deseemos.



$f(x) = -x^2 + 40x + 225$

Antes de pasar a otro ejemplo haremos una observación sobre una propiedad de la función que describe el crecimiento de las bacterias:

Si evaluamos la función $f(x) = -x^2 + 40x + 225$, del ejemplo anterior, en x = 5 obtenemos f(5)=400.

Recordemos que $\lim_{x \to 5} f(x)=400$,

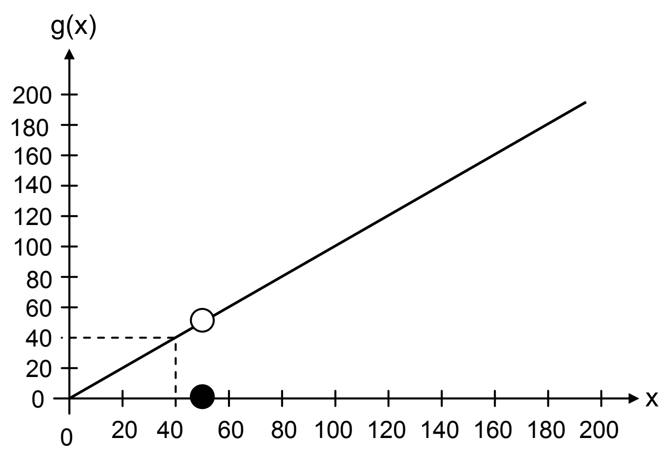
entonces: $\lim_{x \to 5}(-x^2 + 40x + 225) = f(5) = 400$

El hecho de que el limite de una función, cuando $x \to a$, sea igual al valor de la función en a, como sucede con la del ejemplo, tiene una implicación que estudiaremos en la sección de continuidad.

En el siguiente ejemplo aparece una función cuya gráfica tiene un punto que no se comporta como los demás. Obtendremos el límite en ese punto.

Ejemplo.

La siguiente figura es la gráfica de cierta función g(x). Analizaremos algunos detalles matemáticos de esta función, obsérvala con detenimiento:



$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 50 \\ 0 & \text{si } x = 50 \end{cases}$$

a) ¿Cuál es el valor de g(20), g(40), g(50), g(60)?
b) ¿La función g está definida en x = 50?
c) ¿Está 50 en el dominio de g(x)?
d) ¿Crees que una situación de la vida real podría dar lugar a una función con una gráfica así? Inventa una.

Compara tus respuestas con las afirmaciones que siguen:

La función g(x) está definida para x = 50 ya que g(50) = 0, luego, el número 50 si pertenece al dominio de la función, es decir al conjunto de todos los valores que puede tomar la variable x.

La siguiente situación podría originar la gráfica de la figura anterior:

Un grupo de estudiantes de bachillerato organizó una rifa para recabar fondos para su fiesta de graduación, el precio del boleto era de tantos pesos como kilogramos pesara el comprador, pero si una persona pesaba exactamente 50 kg el boleto era gratuito.

Determina la regla de correspondencia de la función que describe el comportamiento del precio del boleto;

---

compárala con la que se propone en el siguiente párrafo:

- El precio del boleto está determinado por la función g(x) dada por:

$$g(x) = x, \quad \text{si } x \neq 50 \; ; \qquad g(x) = 0 \quad \text{si } x = 50$$

Si el peso de una persona está muy próximo a 50 kg, pero es inferior a 50 kg, ¿cuánto pagará por su boleto?

Si una persona pesa un poco más de 50 kg, ¿obtendrá su boleto gratuitamente?

¿Qué sucede con el precio del boleto cuando x se aproxima a 50?

Contestar a esta última pregunta implica determinar el límite de g(x) cuando $x \to 50$.

Observando la figura puedes formarte una idea de cuál es el límite, pero ésta se reforzará con algunos cálculos.

Recuerda el procedimiento numérico que usamos en el ejemplo anterior para obtener el límite.

Elabora una tabla en donde se muestre cómo varían los valores de g(x) para valores de x cercanos a 50 por la izquierda y por la derecha, y contesta lo siguiente:

a) ¿Cuánto valen $\lim_{x \to 50-} g(x)$ y $\lim_{x \to 50+} g(x)$?

b) ¿Cuál es el limite de g(x) cuando x tiende a 50?

Verifica si tu respuesta coincide con lo siguiente:

Ya que $\lim_{x \to 50-} g(x) = 50$ y $\lim_{x \to 50+} g(x) = 50$, el límite de g(x) cuando x tiende a 50 existe y es igual a 50.

Elabora tus conclusiones con respecto a este problema y su modelo matemático, entre ellas deben resaltar las siguientes:

- Por más cerca que esté el peso de una persona a 50 kg, ella pagará su boleto para la rifa. Solamente que pese exactamente 50 kg se le eximirá del pago.
- El $\lim_{x \to 50} g(x) = 50$ es diferente a g(50) = 0...(a)

A pesar de ello el límite existe.

¿Qué relación tiene la afirmación (a) con la gráfica de g?.

___

¿Ésta tiene interrupciones?

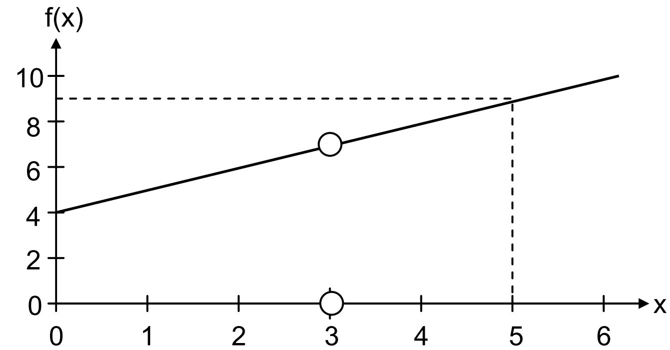
___

Tus respuestas a estas preguntas, nos serán de gran utilidad para construir un importante concepto.

En el ejemplo siguiente investigamos el límite en un punto en el que la función no está definida.

Ejemplo.

Observa la gráfica de la siguiente figura.



El círculo vacío en el número 3 del eje x significa que 3 no está en el dominio de la función f. Su dominio es: Df =R-{3}. El círculo vacío en la gráfica de la función indica que el punto de coordenadas (3,7) no pertenece a dicha gráfica.

Hay situaciones de la vida real en las que se descuida definir una función para determinados valores de la variable independiente, una así daría origen a la figura anterior.

Proporciona un ejemplo.

____

____

A partir de la figura anterior trata de determinar a qué valor se aproxima f(x) cuando x se aproxima a 3 por la izquierda. Haz lo mismo por la derecha. ¿Cuáles crees que son $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ y $\lim_{x \to 3^+} f(x)$?

____

Comprueba tu respuesta por aproximación numérica, para ello requieres la ecuación de la gráfica. Te ayudará saber que f(0) = 4 y que f(5) = 9. Recuerda cómo es la ecuación de una recta.

Sugerencia:

La ecuación de la recta es de la forma $y - y_1 = m(x - x_1)$; empleando los puntos (0,4) y (5,9) obtendrás m = 1, $x_1 = 0$, $y_1 = 4$. Sustituyendo esos valores y simplificando tendrás la ecuación: y = x + 4.

Haciendo y = f (x) se obtiene f (x) = x + 4.

Ahora puedes calcular los valores de f(x) para valores de x cercanos a 3 por la izquierda y por la derecha y organizar la información en una tabla.

x	f(x) = x + 4
2.8	
2.9	
2.99	
3	
3.01	
3.1	
3.2	

Después de examinar tus resultados formula tu conclusión, ¿es como ésta?

Como los límites izquierdo y derecho, cuando $x \to 3$, existen y son iguales a 7, tenemos que $\lim_{x \to 3} f(x)$ existe y es igual a 7.

Advierte que *aunque la función no está definida en 3, su límite cuando x tiende a 3 existe.*

Como en los otros ejemplos, aquí te hacemos la siguiente pregunta que más tarde nos será de utilidad:

¿Qué efecto produce en la gráfica de f el hecho de que f(x) no este definida para x= 3?

____

____

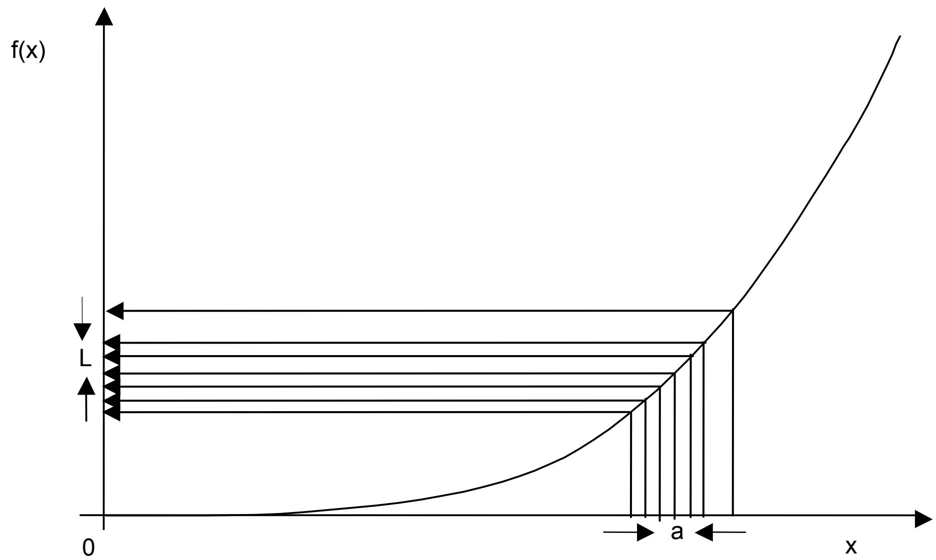
Después de estudiar los tres ejemplos anteriores, concluimos que para que el límite L de una función f(x), cuando $x \to a$, exista, no se requiere que f(a) sea igual a ese límite L (ver el segundo ejemplo), o que la función esté definida en x = a (ver el tercer ejemplo). También podemos formular la siguiente definición:

Definición informal de límite

Cuando se dice que el LIMITE de una función f (x), cuando x tiende a un número real a, es el número real L, o simbólicamente $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$ debemos entender que cuando x se aproxima a a, tanto por la izquierda como por la derecha, pero no es igual a a, f(x) se aproxima a L.

La figura que se presenta a continuación corresponde a la interpretación gráfica de $\lim_{x \to a} f(\mathrm{x}) = \mathrm{L}$ y pretende ilustrar la idea siguiente:

Si x se aproxima a un número real a, f(x) se aproxima a un número real L. Advierte que aquí hay dos procesos: en uno x se está cercando a a y en otro f(x) se está acercando a L. Es posible controlar estos procesos, podemos hacer que f(x) se acerque tanto a L como queramos eligiendo para x un valor tan cerca de a como sea necesario.



ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Emplea el método de aproximación y la interpretación gráfica que se usaron en esta sección para responder a la siguiente pregunta:

¿A qué número se aproxima $f(x) = 2x^2 - x + 3$ cuando x se aproxima a 10?

____

Expresa tu respuesta a la pregunta anterior empleando la notación de límites.

3.1.3 CASOS EN LOS QUE EL LÍMITE NO EXISTE

Hay funciones que tienen un comportamiento tan extraño como el de algunas situaciones que se presentan en las actividades humanas y en la naturaleza. En muchos casos el límite que estamos buscando no existe. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo.

En cierto país los consumidores pagan un I.V.A del 10% cuando el precio x del artículo que compran es menor que $1000.00 y del 20% si su precio es mayor o igual a $1000.00

¿A qué valor limite se aproxima el impuesto cuando el valor de un artículo se aproxima a $1,000.00

¿Qué tenemos que hacer para encontrar el límite?

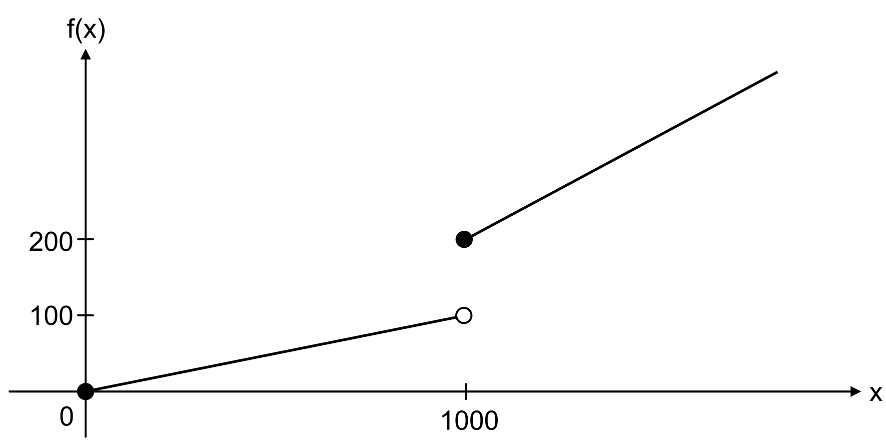
Determinar los límites por la izquierda y por la derecha de la función cuando el precio se aproxima a $1,000.00 y ver si éstos son iguales.

Un recurso para encontrar esos límites es el análisis de la gráfica de la función que determina el monto del I.V.A. Constrúyela haciendo una tabla con algunos precios y su respectivo I.V.A. Para facilitar el cálculo de los valores de la tabla, la regla de correspondencia de la función que describe el comportamiento del I.V.A es la siguiente:

$$f(x) = 0.1x \text{ si } 0 \le x < 1000; \text{ y } f(x) = 0.2x \text{ si } x \ge 1000$$

Incluye en la tabla valores de x muy cercanos a 1000 por la izquierda y por la derecha.

Tu gráfica debió quedarte como la siguiente figura.



La función de la gráfica es:

$$f(x) = \begin{cases} 0.1x & \text{si } 0 \le x < 1000 \\ 0.2x & \text{si } x \ge 1000 \end{cases}$$

Mediante la observación de la grafica trata de determinar los limites a los que tiende f(x) por la izquierda y por la derecha cuando x tiende a 1000. Confirma tu suposición examinando los valores de la tabla que hiciste.

Los limites son:

$$\lim_{x \to 1000-} f(x) = 100 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1000+} f(x) = 200$$

Aquí hay un problema:

Si los limites izquierdo y derecho de una función, cuando $x \to a$*, no son iguales, entonces el* $\lim_{x \to a} f(x)$ *no existe*.

Luego $\lim_{x \to 1000} f(x)$ no existe.

Observa que en este ejemplo la función si esta definida en x = 1000 ya que f(1000)=200, sin embargo, $\lim_{x \to 1000} f(x)$ no existe.

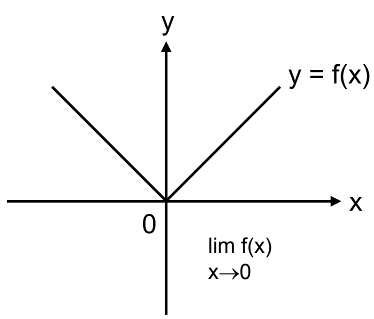
Piensa en esta pregunta, ¿qué sucede con la gráfica de la función f(x) del ejemplo anterior en x = 1000?

Más adelante se considerarán otros casos en los que el límite no existe

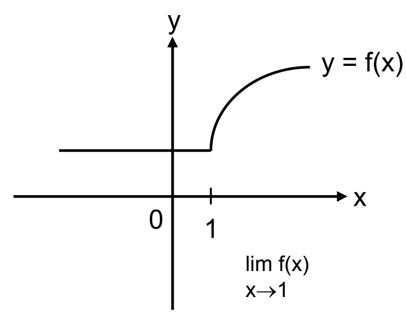
ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Indica si existe el límite en cada una de las siguientes gráficas.

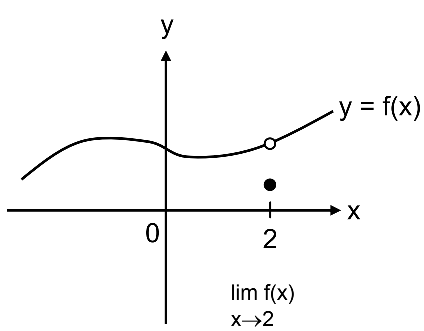
a)



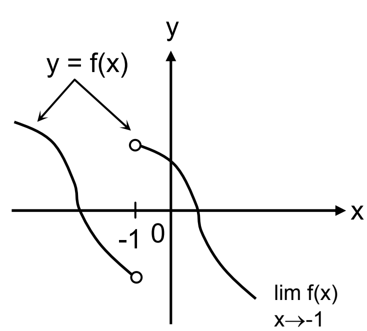
b)



c)

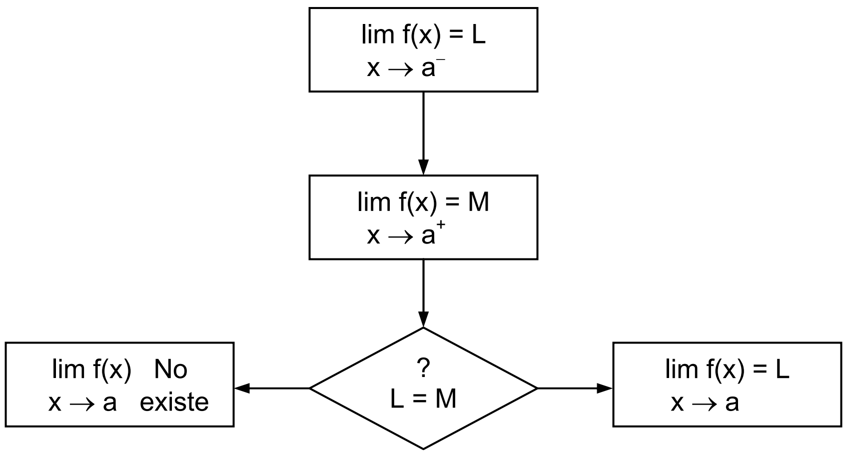


d)



EXPLICACIÓN INTEGRADORA

Después de estudiar el tema 3.1 "LIMITE DE UNA FUNCIÓN" podemos formular el siguiente diagrama para determinar cuando una función f(x) se aproxima a un límite L al tender la variable x a un número real a:

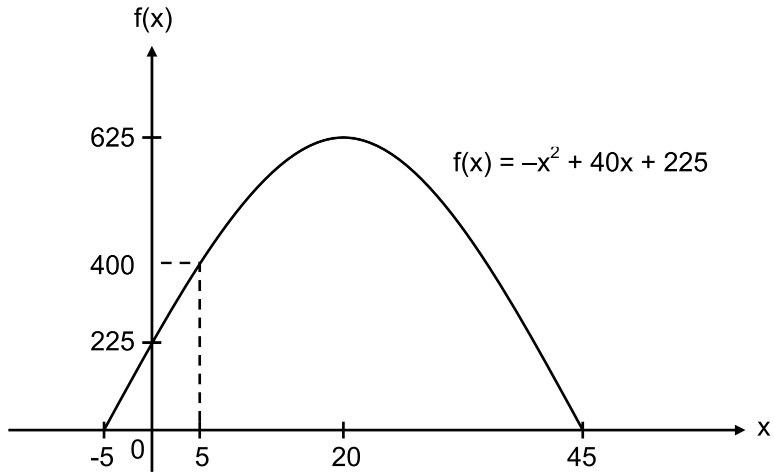


3.2 CONTINUIDAD

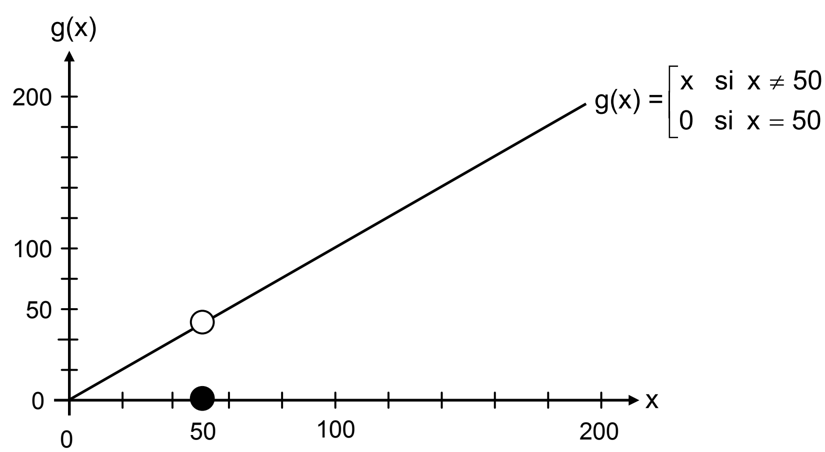
Al estudiar los cuatro ejemplos anteriores hicimos algunas observaciones que reservamos para un análisis posterior, en esta sección las retomamos para estudiar el importante concepto de continuidad.

Observa la gráfica de la función del primer ejemplo que se reproduce en la figura del inciso a).

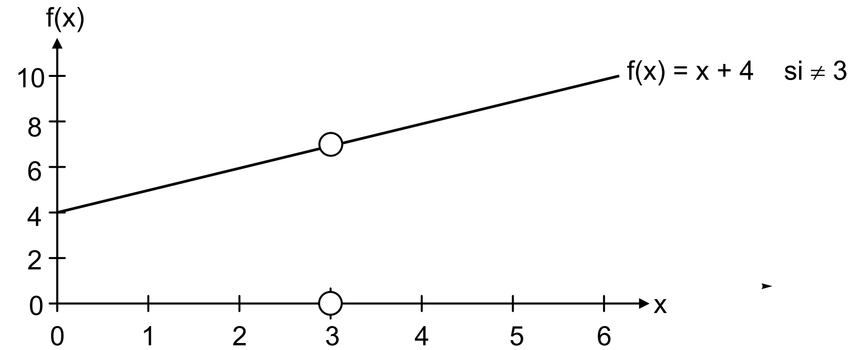
a)



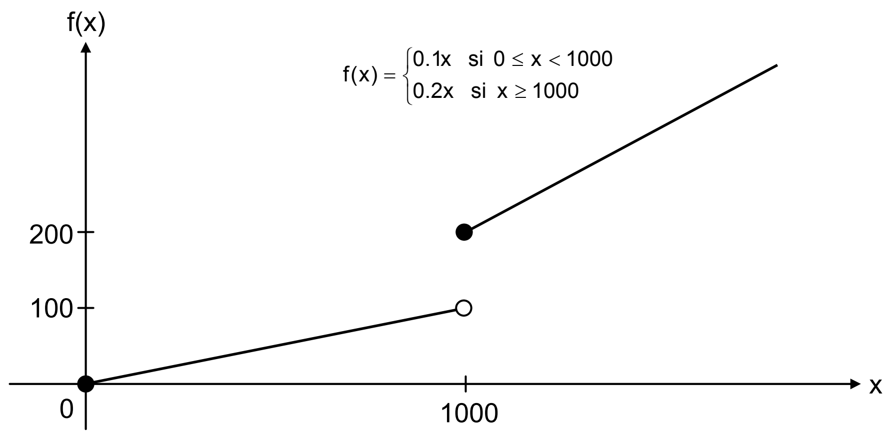
b)



c)



d)



Enfoca tu atención a la zona de la gráfica cercana a x =5.

¿Puedes trazar la gráfica en cualquier intervalo pequeño que contenga a x = 5 sin despegar el lápiz del papel?

Una respuesta afirmativa a la pregunta anterior significa, de manera intuitiva, que la gráfica de la función no tiene una ruptura o un hueco en x = 5. En el lenguaje matemático se dice que la gráfica de la función es continua en 5. Si este es el caso, también la función es continua en 5.

Precisemos un poco más, aunque de manera informal, la idea de continuidad de una gráfica:

3.2.1 FUNCIÓN CONTINUA

La gráfica de una función es continua sobre un intervalo, si su gráfica sobre ese intervalo puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel. Si una gráfica está desconectada en x = a se dice que es discontinua en x = a.

Compara $\lim_{x \to 5} (-x^2 + 40x + 225) = 400$ con $f(5) = 400$.

¿A qué conclusión llegas?

___

En efecto, el límite de la función cuando x tiende a 5 es igual al valor de la función en 5, esto es: $\lim_{x \to 5} (-x^2 + 40x + 225) = f(5) = 400$.

Este resultado no es casual, puede generalizarse para todas las funciones continuas, lo haremos más adelante.

En el caso del segundo ejemplo (figura del inciso b), ¿puedes trazar la gráfica de g(x), en las cercanías del punto que tiene abscisa x = 50 sin despegar el lápiz del papel?

___

¿Por qué no es posible?

___

Luego, ¿es continua en x = 50 la función del segundo ejemplo?

___

¿Has notado qué el punto de la gráfica de g(x) de abscisa igual a 50 “da un salto”?

___

Compara el $\lim_{x \to 50} g(x)$ con $g(50)$.

Observa que el $\lim_{x \to 50}$ g (x) = 50 es diferente con g (50) = 0.

Cuando estudiamos el tercer ejemplo encontramos que aunque la función no está definida en 3, su límite cuando x tiende a 3 existe y es igual a 7.

Analiza la gráfica del inciso c) que corresponde a la función del tercer ejemplo y responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Puede dibujarse la gráfica de f (x) en cualquier intervalo abierto muy pequeño que contenga a 3 sin despegar el lápiz del papel?

   ____

2. ¿Es continua la gráfica de la función en el punto de abscisa x = 3?

   ____

3. ¿Es continua la función en x = 3?

   ____

4. ¿Es f (3) = $\lim_{x \to 3}$ f (x)?

   ____

En el cuarto ejemplo encontramos que aunque la función está definida en x = 1000,
f (1000) = 200, $\lim_{x \to 1000}$ f (x) no existe

Estudia la gráfica del cuarto ejemplo (figura del inciso d).

¿Puede dibujarse la gráfica de la función f del ejemplo 4 en cualquier intervalo pequeño que contenga a x = 1000 sin despegar el lápiz del papel? Explícalo.

____

____

____

Resumiendo: La grafica del primer ejemplo puede trazarse sin levantar el lápiz del papel, las otras no, porque están “rotas”.

Esto tiene que ver con las respuestas a las siguientes preguntas:

1) ¿Existe $\lim_{x \to a}$ f (x)? ____

2) ¿Existe f (a)? ______________________________

3) ¿ $\lim_{x \to a}$ f (x) = f (a)? ______________________________

Contestémoslas para cada una de las funciones de los 4 ejemplos, recuerda que en el primero, a = 5; en el segundo, a = 50; en el tercero, a = 3 y en el cuarto, a = 1000.

¿Te das cuenta de que si alguna de las respuestas a estas preguntas es no, entonces la función no es continua en x = a por que ello implica que hay una "rotura"en este punto?.

De lo anterior se desprende la siguiente definición:

Función continua

Sea *f* una función definida en un intervalo abierto que contiene a *a*. La función *f* es continua en *a* si, y sólo si a) $\lim_{x \to a}$ f (x) existe; b) f (a) existe; y c) $\lim_{x \to a}$ f(x) = f (a)

La expresión "si, y sólo si" significa que:

1) f es continua si se cumplen a), b) y c), además;
2) Si f es continua se cumplen a), b) y c).

La continuidad en un intervalo se establece en la siguiente definición:

Continuidad de una función *f* en un intervalo (a,b)

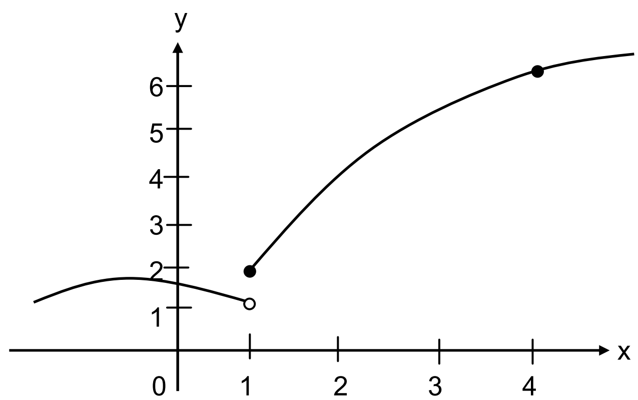
Una función es continua sobre el intervalo abierto (a, b) si es continua en cada punto del intervalo.

Usando la definición analiza la continuidad, en el número *a,* de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ en a = 4

b) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \leq 3 \\ 3x + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ en a = 3

Así como hay límites por la derecha y por la izquierda, también hay continuidad por la derecha y por la izquierda. Observa la siguiente grafica:



Según la figura anterior, $\lim_{x \to 1+} f(x) = 2 = f(1)$, y $\lim_{x \to 4-} f(x) = 6 = f(4)$ por lo cual la gráfica es continua por la derecha en x = 1 y continua por la izquierda en x = 4.

Lo anterior puede aplicarse a la función en general:

> Una función f es continua por la derecha en x = a si $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$ y es continua por la izquierda en x = b si $\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$.

Hemos determinado cuando una función es continua en un punto, en un intervalo abierto, cuando es continua en un punto por la izquierda o por la derecha. Ya estamos en condiciones de definir la continuidad de una función en un intervalo cerrado:

Función continua en un intervalo cerrado

> Las funciones continuas en un intervalo abierto (a, b) y continuas por la derecha en a y por la izquierda en b son continuas en el intervalo cerrado [a , b].

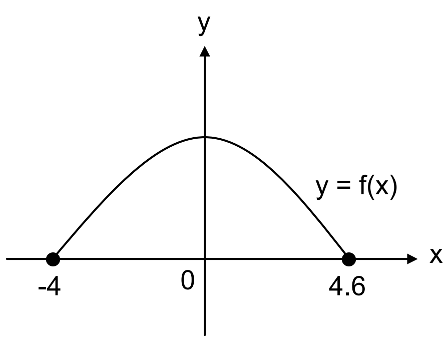
Por ejemplo la función definida por la gráfica de la figura anterior es continua por la derecha en x = 1 y continua por la izquierda en x = 4, también es continua en el intervalo abierto (1,4), (es continua en cada punto del interior del intervalo y también en sus extremos por la derecha y por la izquierda) por lo tanto, es continua en el intervalo cerrado [1,4].

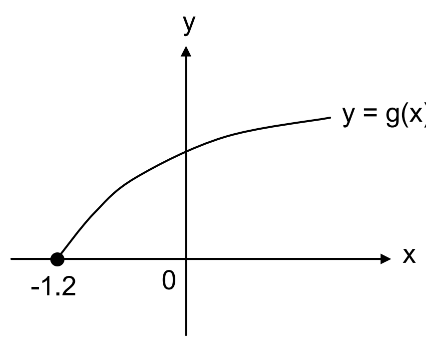
ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

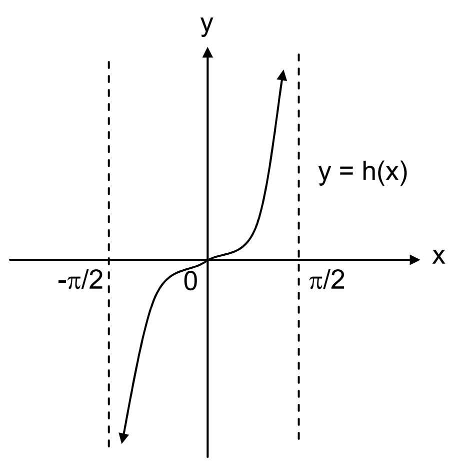
Contesta las siguientes preguntas.

1) Estudia los ejemplos 2- 4 . ¿En que valores de x son discontinuas las gráficas correspondientes? ____

2) Dadas las gráficas de las funciones de diferentes clases que se presentan a continuación, indica en qué intervalos son continuas y en que valores de x son discontinuas :







3.2.2 TÉCNICAS ALGEBRAICAS PARA CALCULAR LÍMITES

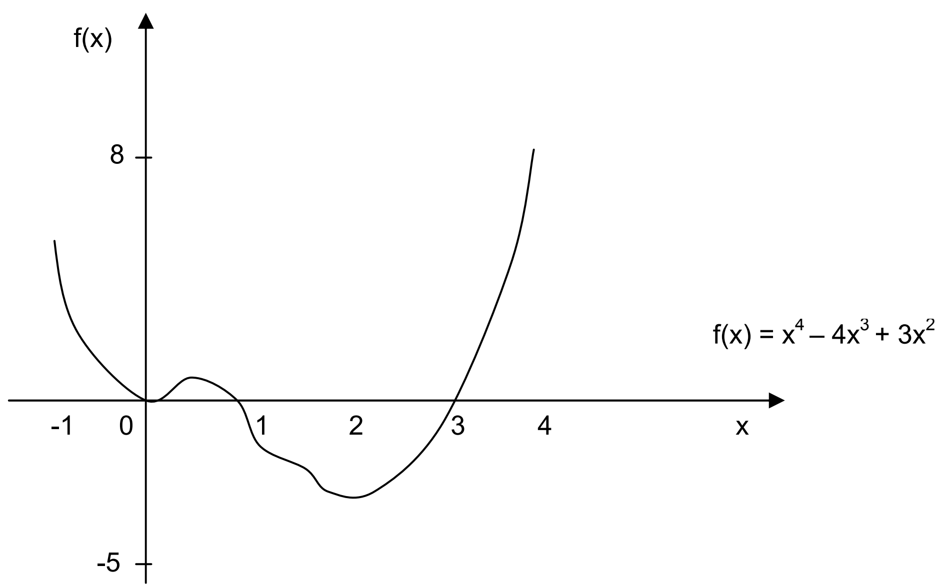
Para estimar el valor de los límites hemos usado hasta ahora un método que consiste en aproximarnos a ellos numéricamente. Las computadoras emplean métodos de este tipo para obtener límites.

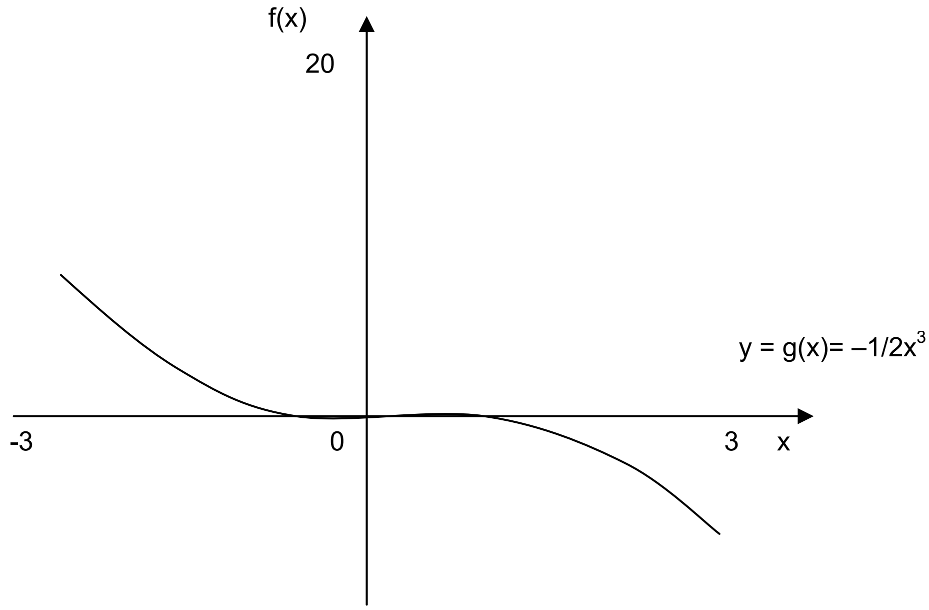
Ellas hacen las operaciones aritméticas a gran velocidad pero a nosotros puede llevarnos mucho tiempo, a menos que contemos con una calculadora programable o un programa de computadora (y los sepamos usar). Por lo anterior es de gran utilidad conocer algunas técnicas algebraicas para obtener límites sin tener que hacer muchos cálculos aritméticos.

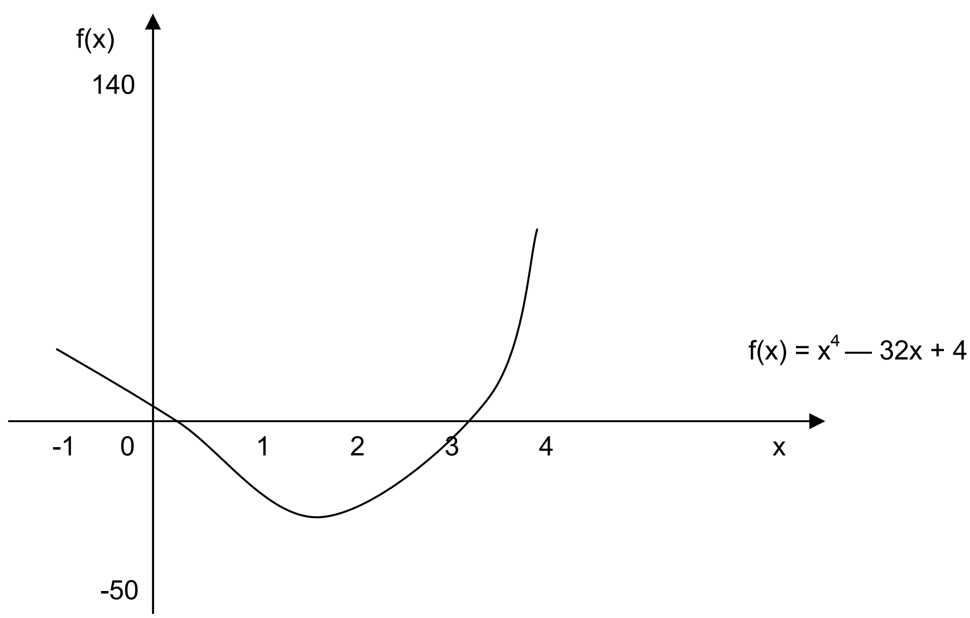
a) Límites de Funciones Polinomiales

Como ya estudiaste en segundo semestre, múltiples fenómenos pueden ser descritos por medio de funciones polinomiales. Por ejemplo la trayectoria que sigue cierto proyectil se describe por medio de la función con regla de correspondencia $f(x) = -0.3x^2 + x$; la velocidad con que se llena determinado tanque se describe por medio de una función cuya regla de correspondencia es $f(x) = x^3 + 60x^2 + 300x$. En ambos casos las funciones son polinomiales.

La siguiente figura muestra las gráficas de algunas funciones polinomiales, que deben resultarte familiares.




f(x)
20
y = g(x)= –1/2x3
-3
0
3
x


f(x)
140
f(x) = x4 — 32x + 4
-1
0
1
2
3
4
x
-50

La función $f(x) = -x^2 + 40x + 225$ del primer ejemplo es también una función polinomial.

Recuerda que una función polinomial tiene la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_o$$

en donde los coeficientes ahí son constantes y el exponente n es un entero positivo o cero.

Para estudiar los fenómenos que son modelados por funciones polinomiales se requiere en ocasiones calcular límites, como se hizo en el primer ejemplo. Trataremos de encontrar un método sencillo para calcular los límites de las funciones polinomiales .

Analicemos algunas características de las funciones polinomiales.

a) Investiguemos el dominio de una función polinomial f.

Para cada número real x, f(x) toma un valor real, entonces el dominio de una función polinomial cualquiera, es el conjunto de todos los números reales

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Sean $f(x) = 2x + 4$; $g(x) = x^2 - 5$; $h(x) = 2x^3$

1. Calcula los siguientes límites por aproximación numérica:

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 4} g(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$

2. Calcula f (3), g (4) y h (1)

3. Compara

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ con $f(3)$

b) $\lim\limits_{x \to 4} g(x)$ con $g(4)$

c) $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$ con $h(1)$

¿Qué observaste? ____

¿Puedes hacer alguna conjetura con respecto al límite de una función polinomial cuando x tiende a un valor dado a? ______________________________

Parece ser que:

Los límites de las funciones polinomiales, cuando *x* tiende a un número real *a* pueden calcularse simplemente evaluando la función en a.

En efecto:

Si f es una función polinomial, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ para todo número real a.

La afirmación anterior es muy valiosa por que nos proporciona un método muy sencillo para calcular límites de funciones polinomiales que apoya la conjetura que hicimos a partir del análisis de los casos particulares.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Usando el resultado que acabamos de encontrar, calcula

a) $\lim_{x \to 3} (5 - 3x^3)$ b) $\lim_{x \to 2} (x^4 - 5x^3 + 2x^2$ c) $\lim_{x \to 5} 8$

Solución

a) . $\lim_{x \to 3} (5 - 3x^3) = 5 - 3(27) = -76$ b) $\lim_{x \to 2} (x^4 - 5x^3 + 2x^2) = -16$ c) $\lim_{x \to 5} 8 = 8$

Continuidad de las Funciones Polinomiales

Analizaremos en seguida la relación entre la continuidad y los límites de las funciones polinomiales.

Observa la figura correspondiente a las gráficas de las funcione polinomiales, ¿adviertes que no tienen interrupciones en ningún elemento de su dominio (R)?, ¿se pueden dibujar sin despegar el lápiz del papel a lo largo de todo el eje "x"?, ¿son continuas para toda $x \varepsilon R$?

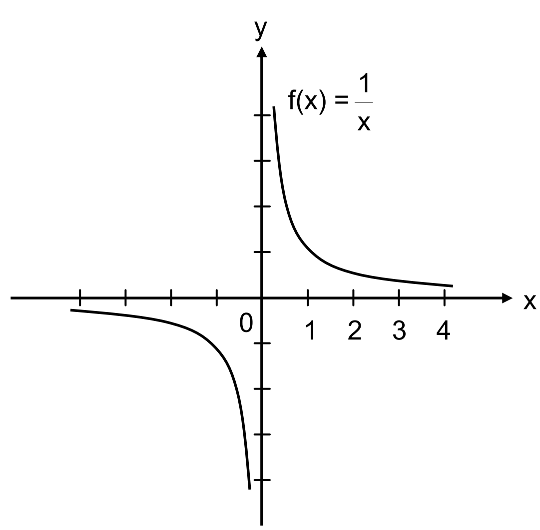
Así que según la evidencia gráfica:

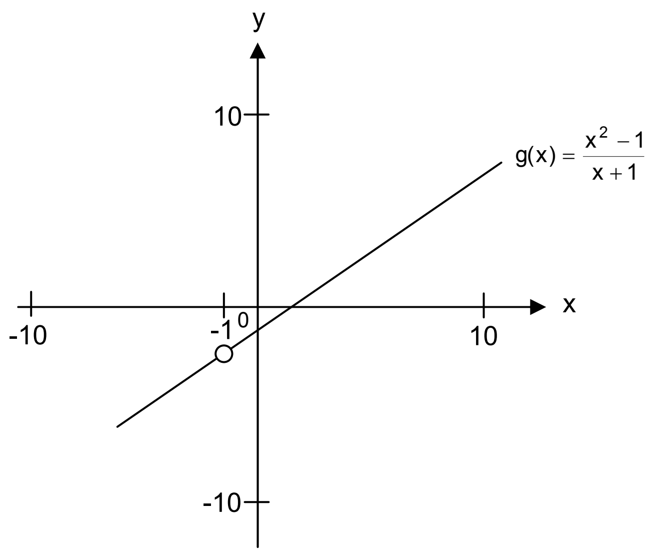
Las funciones polinomiales son continuas para toda $x \varepsilon R$.

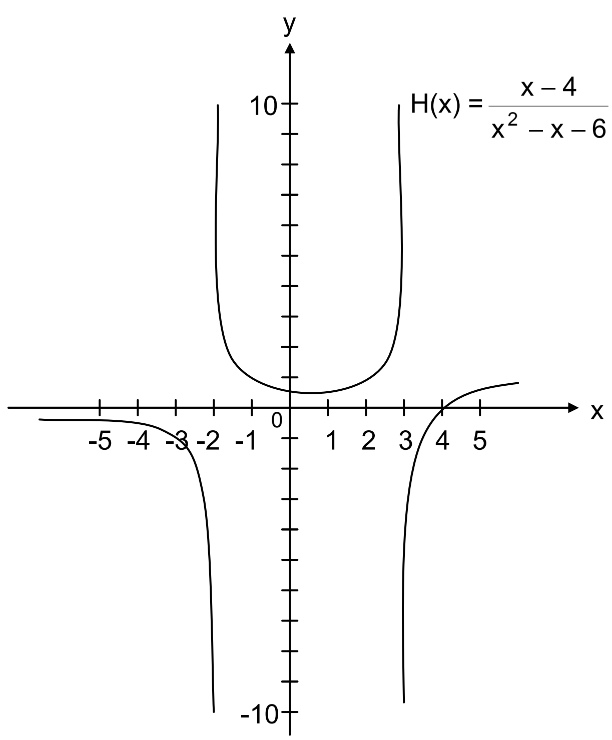
Considerando la definición de función continua, ¿se cumplen las condiciones necesarias y suficientes para que las funciones polinomiales sean continuas en todo número real x? Es decir, para todo real a:

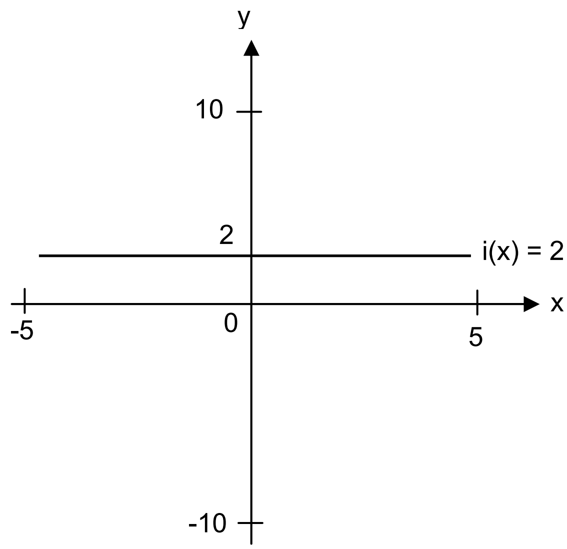
1) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
2) Existe f (a)
3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

El análisis que efectuamos en el la sección anterior nos proporciona elementos para pensar que así es, esto refuerza la evidencia gráfica.




y
10
$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$
x
-10
-1
0
10
-10


y
10
$H(x) = \frac{x - 4}{x^2 - x - 6}$
x
0
-5 -4 -3 -2 -1
1 2 3 4 5
-10



b) Límites de Funciones Racionales

Las funciones racionales son cocientes de polinomios, por ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} \quad ; \quad h(x) = \frac{x - 4}{x^2 - x - 6} \quad ; \quad i(x) = \frac{2}{1} = 2$$

Sólo que el divisor no puede ser cero ¿por qué?.

Las gráficas de estas funciones se muestran en las figuras anteriores.

Vuelve a revisarlas.

Como en el caso de las funciones polinomiales trataremos de usar técnicas algebraicas para encontrar límites de funciones racionales y así evitar numerosos cálculos aritméticos.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Realiza las siguientes actividades:

a) Empleando el método de aproximación numérica, calcula :
$\lim_{x \to 2}$ f (x); $\lim_{x \to 1}$ g (x); $\lim_{x \to 2}$ h (x); $\lim_{x \to 3}$ i (x)

Por otra parte obtén f (2), g (1), h (2), i (3)

¿Coincide estos últimos valores con los respectivos límites de las funciones?

___

¿Crees que esos límites podrían ser obtenidos evaluando la función en el número al que tiende x como en el caso de las funciones polinomiales?

___

b) Ahora calcula por aproximación numérica los siguientes límites:
$\lim_{x \to 0} f(x)$ $\lim_{x \to -1} g(x)$ $\lim_{x \to 3} h(x)$

Por otra parte calcula: f (0), g (–1) , h (3) .

¿Coinciden estos últimos valores con los respectivos limites de las funciones?

___

¿Qué conclusión obtienes de los resultados de los cálculos que hiciste en los incisos a y b?

___

-En algunos casos los limites de las funciones racionales f (x), cuando $x \to a$, pueden hallarse evaluando f(a); en otros no, ¿por qué?

___

Algunas funciones racionales no están definidas para determinados valores de x, precisamente en los valores de x que hacen que el denominado tome el valor cero ¿qué pasa si en una fracción el denominador es cero, o si en una división el divisor es cero?; sin embargo es importante saber que sucede con la función cuando x se acerca a esos valores. La aplicación de nuestros conocimientos de álgebra puede sernos de gran ayuda para facilitar la búsqueda del límite.

Ejemplo. Sea

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Se desea calcular $\lim_{x \to 3} f(x)$

¿Podremos obtener este límite calculado f (3), tal como se hace para las funciones polinomiales?

____

Intentémoslo.

¿Cuál es el valor de la función cuando x = 3?

____

Sustituyendo a x por 3 obtenemos 0/0 que, como sabemos es una operación indefinida; así que f (x) NO ESTA DEFINIDA PARA x = 3.

Luego, la sustitución directa de x por 3 no nos da información sobre el valor de $\lim_{x \to 3} f(x)$

Obtengamos información sobre el límite por el método numérico de aproximaciones sucesivas.

Calcula el valor de f (x) para valores cercanos a tres y organiza la información en una tabla.

¿A que valor se aproxima f (x) cuando x se aproxima a 3?

____

¿Cuál espera que sea el limite de f (x) cuando x $\to$ 3? __________________________

____

Los resultados obtenidos por medio de la actividad anterior nos permite conjeturar que el límite que buscamos es 6. Emplearemos enseguida una estrategia para encontrar el límite por métodos algebraicos.

Aplicando los conocimientos de álgebra adquiridos en cursos anteriores puedes encontrar una expresión equivalente la fracción

$$\frac{x^2-9}{x-3}$$

En la que el denominador no sea cero cuando x tome el valor 3.

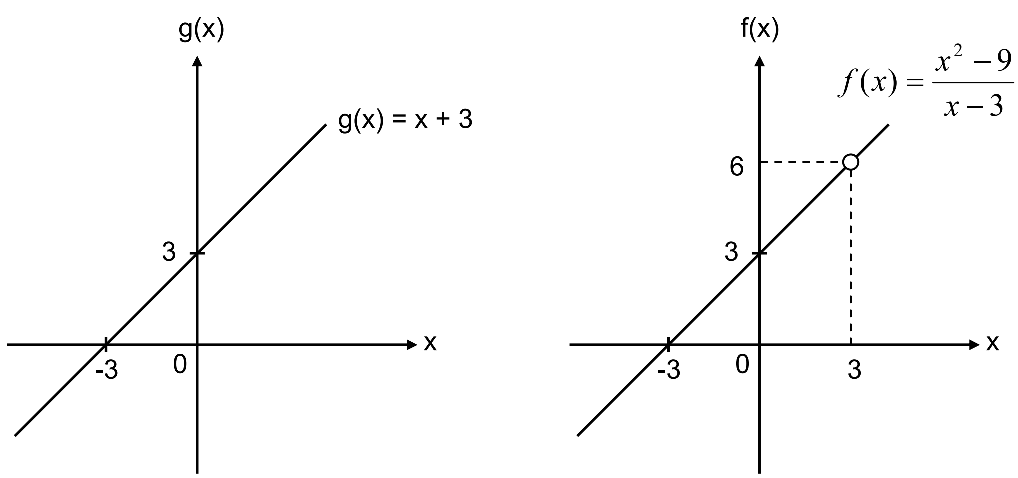
Recuerda el procedimiento que se basa en la factorización del numerador y el denominador:

$$\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=x+3$$

Llamemos g (x) a x + 3.

Construye las gráficas de las funciones g (x) = x + 3 y $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$

La siguiente figura muestra las gráficas de f (x) y g (x)



¿Cuál es la diferencia entre ellas? ____________________

Observa que la diferencia entre las gráficas es que la de g (x) es una recta sin interrupciones (es continua) mientras que la de f (x) es una recta con un hueco en (3, 6). Sin embargo, cuando x se aproxima a 3, ambas funciones se aproximan al mismo valor 6, esto es,

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} g(x) = (x+3)$$

Así que podemos usar la función g(x) para calcular el limite de la función f(x).

¿Cuál es la ventaja de usar g (x) = x + 3 para evaluar $\lim_{x \to 3} f(x)$

____

La función g(x) es polinomial y, como se ha visto, para obtener el limite de una función polinomial g(x) cuando x tiende a un número real a, calculamos g (a).

Concluyendo:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x+3) = 6$$

Nótese que aunque f(x) no está definida para x = 3, $\lim_{x \to 3} f(x)$

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Calcula los siguientes limites empleando el método algebraico que acabamos de estudiar (factorización).

a) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} =$ b). $\lim_{x \to -8} \frac{x^2 + 5x - 24}{x + 8}$ c). $\lim_{h \to 0} \frac{5a^2h + 5ah^2 - h}{h}$

Solución: a) –2 b) –11 c) $5a^2 - 1$

Continuidad de las Funciones Racionales

Como ya se había mencionado las funciones racionales son concientes de polinomios, es decir tienen la forma f(x) = [g(x) / h(x)] en donde g(x) y h(x) son polinomios y h(x) $\neq$ 0.

Dominio de una Función Racional

Una función racional f(x) no está definida para valores de x que anulen el denominador, pero si para los demás números reales, así que *su dominio consiste en el conjunto de todos los números reales para los cuales el denominador sea distinto de cero.*

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Responde las siguientes preguntas:

¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$?

___

¿Para que valores de x, x – 3 es igual a cero?

___

¿Qué pasa en el punto de abscisa x = 3 de su gráfica?

___

¿Es continua la gráfica de la función en este último punto?

___

El dominio de f (x) es el conjunto de todos los números reales distintos de 3, esto es: (–∞, 3) U (3, ∞).

El divisor de $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ se hace igual a cero cuando x = 3.

La gráfica tiene un “hueco” en el punto de abscisa x = 3 y, por ende, no es continua allí.

¿Es continua esta función en (–5, 5)?, ¿por qué?

____

¿Es continua en cada punto de su dominio (–∞, 3) U (3, ∞)?

____

La respuesta a las dos últimas preguntas son afirmativas.

Verificarlo empleando los hallazgos de la sección que trata de continuidad.

No habíamos considerado en la sección de continuidad la siguiente definición:

Una función es continua en su dominio si es continua en cada punto de su dominio.

De acuerdo con la definición, ¿Es continua en su dominio $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$?

____

La función f(x) del ejemplo anterior no es continua en cualquier número real ya que es discontinua en x = 3, pero si es continua en su dominio: (–∞, 3) U (3, ∞) ya que en el no esta el número 3.

En conclusión:

Las funciones racionales son continuas en todos los números reales, excepto en aquellos que hacen cero su denominador. Son continuas en su dominio, que excluye dichos puntos.

En la sección correspondiente a los límites y el infinito analizaremos más gráficas de funciones racionales.

En el ejemplo anterior empleamos la simplificación de fracciones algebraicas para facilitar la búsqueda de un límite, pero tú habrás encontrado fracciones que no se pueden simplificar, ¿cómo vamos a proceder en tales casos? En la siguiente sección hallaremos la respuesta.

c) Propiedades de los Límites

Ya estudiamos como obtener límites, cuando x $\to$ a, de funciones polinomiales y de algunas funciones racionales. No todas las funciones son de los tipos mencionados, pero los límites tienen propiedades que nos facilitan su cálculo. Descubriremos alguna a partir del estudio de algunos casos particulares.

Límite de una función constante

Las funciones constantes son también polinomiales (revisa la definición) asÍ que para encontrar sus límites cuando x $\to$ a, evaluamos la función con el valor de a.

Ejemplo. Hallar $\lim_{x \to 2} 4$

Si f (x) = 4 para todo real x, f(2) = 4, entonces

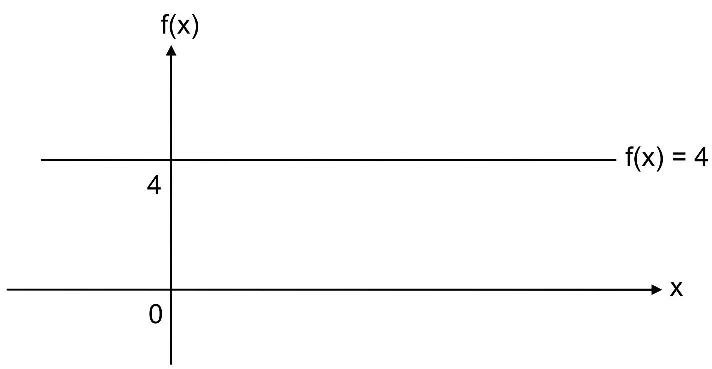
$$\lim_{x \to 2} 4 = 4$$

La gráfica de la función nos ayudará a ilustrar esta situación.

Por eso es conveniente que realices las siguientes actividades:

Construye la gráfica de f (x) =4

La gráfica debió resultarte como la siguiente figura.



Observa la gráfica y responde a la siguiente pregunta:

¿A que número se aproxima f (x) cuando x se aproxima a 2?

-La función f es una función constante, para cualquier valor de x, f(x) = 4, así que cuando x se aproxima a 2, f (x) se aproxima a 4.

Considerando lo anterior, ¿cuál es el límite de f (x) = 4 cuando x tiende a 2?

Verificamos que $\lim_{x \to 2} 4 = 4$

A partir del resultado anterior haremos la siguiente generalización:

Si c es una constante, entonces $\lim_{x \to a}$ c = c para cualquier número real a

Hemos hecho una generalización apoyándonos en la visualización de la gráfica. En otras ocasiones hemos formulado enunciados generales a partir del examen de casos particulares. Estos enunciados generales deben demostrarse rigurosamente para ser aceptados como verdaderos. En los cursos de bachillerato no llevaremos a cabo demostraciones rigurosas pero estaremos concientes de su necesidad.

Limite de la Suma, la Diferencia, el Producto y el Cociente de Dos Funciones.

Si conocemos los límites de dos funciones f(x) y g(x), cuando x $\to$ a, podemos determinar los límites de la suma, la diferencia, el producto y el cociente de f(x) y g(x) (siempre que el límite del divisor no sea igual a cero).

Estudiemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo.

Sean $\mathrm{f(x) = x^2 + 1}$ y $\mathrm{g(x) = x^3}$, entonces

$\lim_{x \to 2} \mathrm{f(x)} = 5$ y $\lim_{x \to 2} \mathrm{g(x)} = 8$

Obtengamos el límite de la suma de f(x) y g(x).

$$\lim_{x \to 2} f(x) + g(x) = \lim_{x \to 2}(x^2 + 1 + x^3)$$

El segundo miembro de la igualdad anterior es el límite de un polinomio. Ya sabemos calcularlo. Evaluamos la función para x = 2 y obtenemos:

$$\lim_{x\to 2}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to 2}(x^2+1+x^3) = 13$$

Si, por otra parte sumamos los límites de f(x) y g(x), obtenemos:

$$\lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to 2} g(x) = 5 + 8 = 13$$

Entonces,

$$\lim_{x\to 2} f(x) + g(x) = \lim_{x\to 2} f(x) + \lim g(x)$$

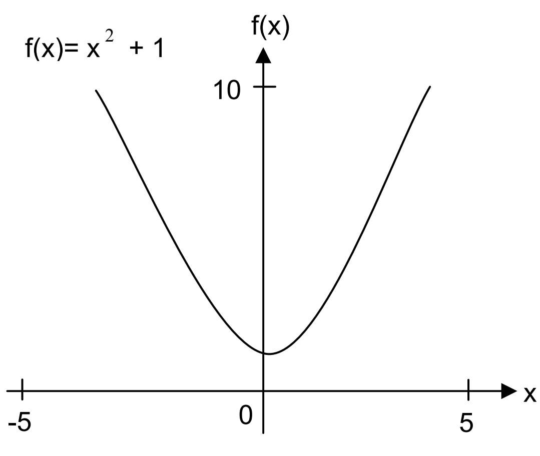
Examinando más casos particulares podríamos formular la siguiente conjetura:

Suponiendo que los límites de las funciones f(x) y g(x) cuando x $\to$ a son ciertos números L y M respectivamente, la expresión general de la propiedad que encontramos en el ejemplo anterior, es la siguiente:

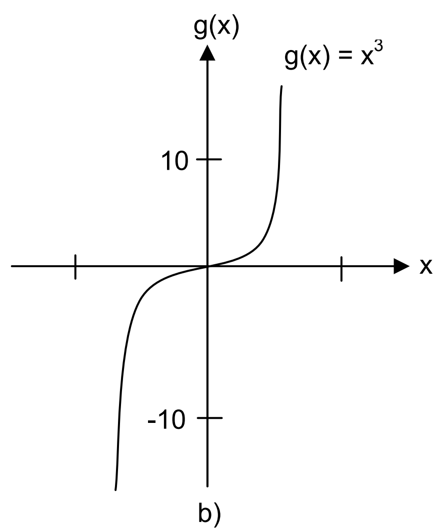
$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = L + M$$

Esta propiedad puede ser demostrada rigurosamente, cosa que dejaremos para cursos de licenciatura.

La siguiente figura muestra la gráfica de las funciones f(x), g(x) y las que resultan de varias operaciones con ellas.

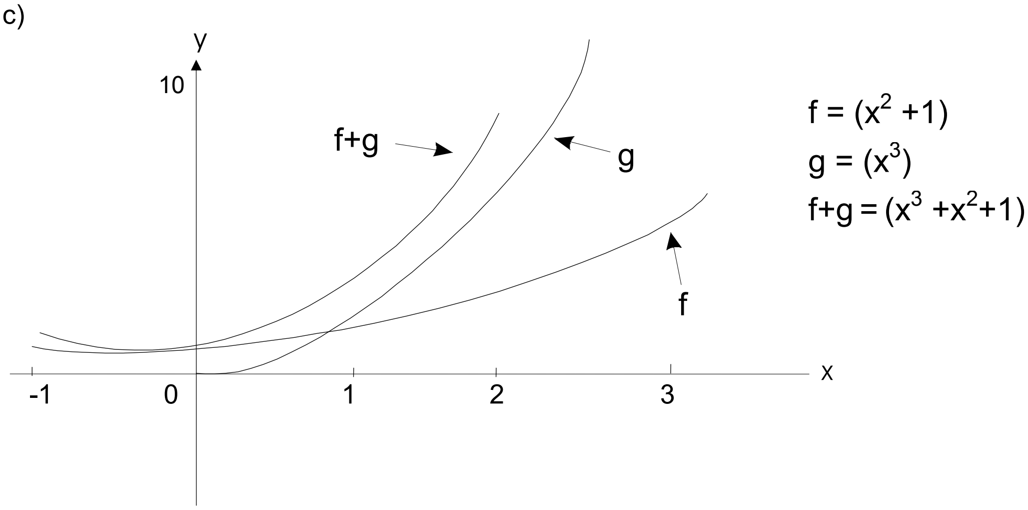


a)

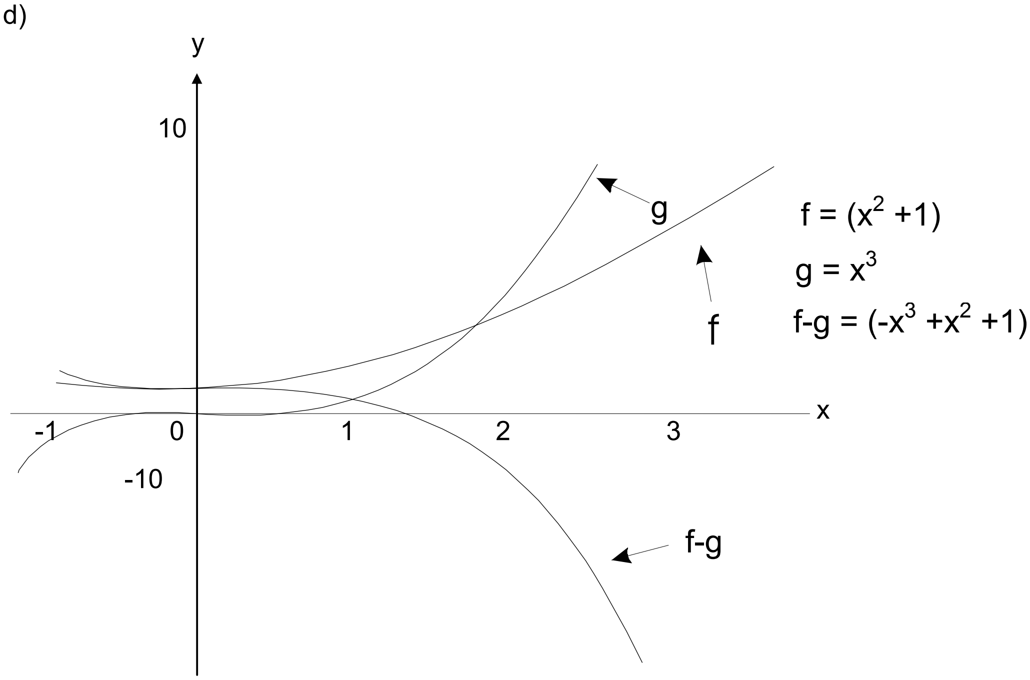


b)

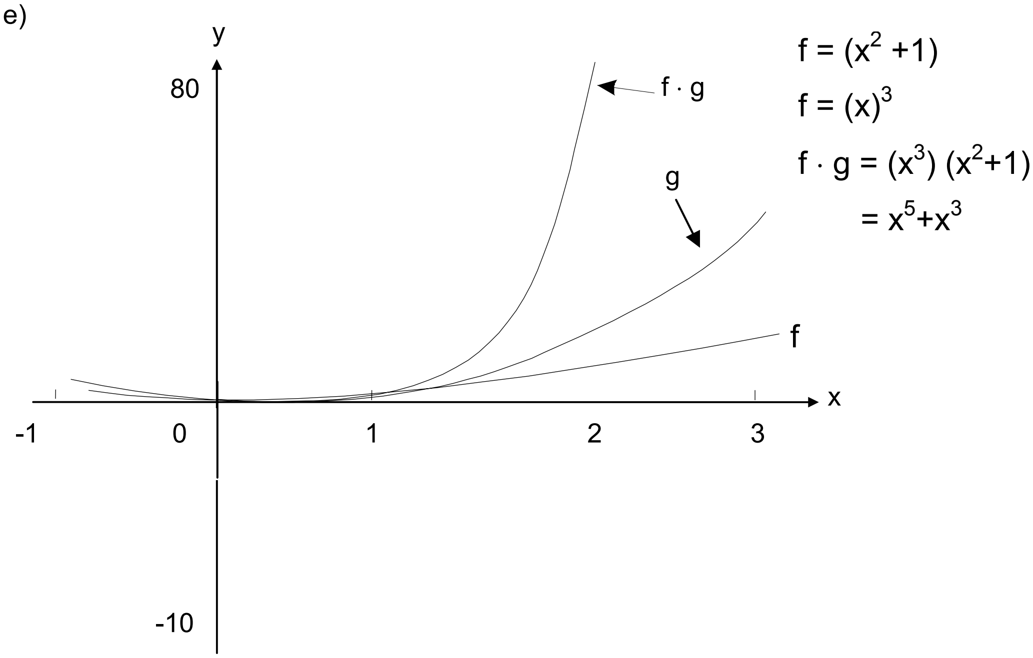
c)


y
10
f+g
g
f
x
-1
0
1
2
3
f = (x^2 +1)
g = (x^3)
f+g = (x^3 +x^2+1)

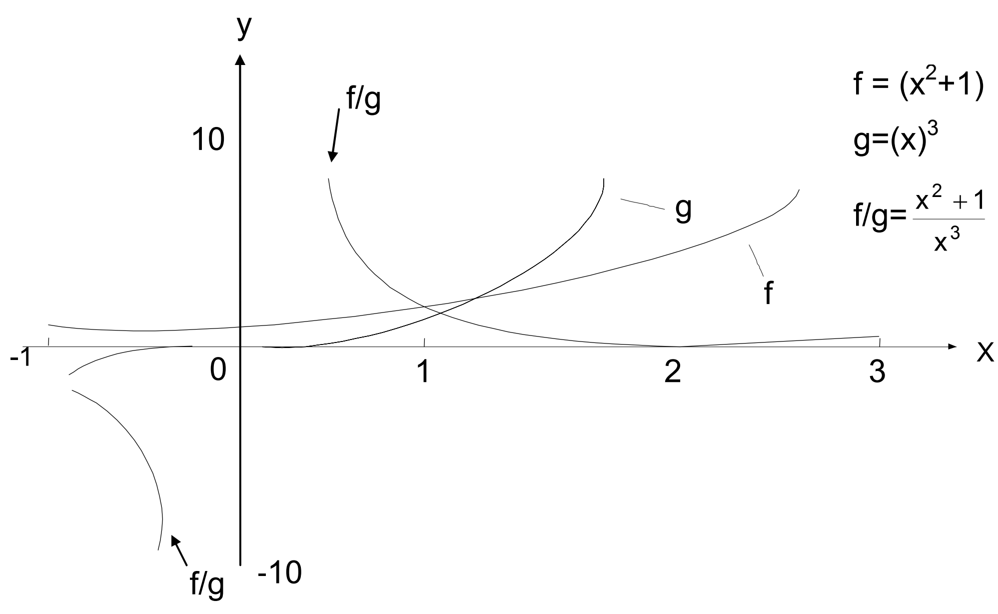
d)


y
10
g
f = (x^2 +1)
g = x^3
f
f-g = (-x^3 +x^2 +1)
x
-1
0
1
2
3
-10
f-g

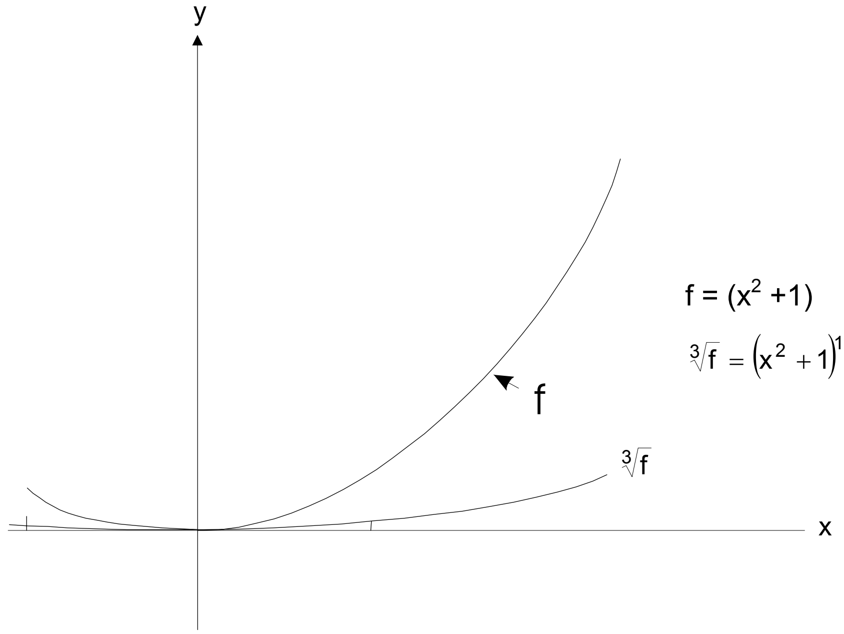
e)


y
80
-10
x
-1
0
1
2
3
f · g
g
f
f = (x² +1)
f = (x)³
f · g = (x³) (x²+1)
= x⁵+x³

f)


y
10
-10
X
-1
0
1
2
3
f/g
g
f
f/g
f = (x²+1)
g=(x)³
f/g= (x² + 1)/x³

g)



Siguiendo un proceso como el del ejemplo anterior y con apoyo de las gráficas (a, b, c y d), tú puedes obtener la siguientes propiedades:

Si los límites de la funciones f y g cuando x $\to$ a son ciertos números L y M respectivamente, entonces:

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=L-M$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=L\cdot M$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M}$$ si M $\neq$ 0

Un caso particular de la propiedad del producto se presenta cuando f (x) = k, con k constante. Como ya hemos visto $\lim_{x\to a}k=k$

Luego: $\lim_{x\to a}kf(x)=kL$ para cualquier constante k.

Límite de una Potencia y una Raíz

Generalizando la propiedad del producto a n factores iguales, se obtiene la propiedad:

$\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = L^n$ en donde n es un entero positivo.

Para el límite de la raíz enésima de una función se obtiene:

$\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ con n entero positivo y L > 0 si n es par ¿puedes explicar porque esta restricción?

Veamos un ejemplo de la aplicación de las propiedades anteriores.

Calcular $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 + 3 - 2}{x + 3}$

Solución.

$\lim\limits_{x \to 2} (2x^2 + 3x - 2) = 12$ y $\lim\limits_{x \to 2} (x + 3) = 5$

Luego

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 + 3 - 2}{x + 3} = \frac{12}{5}$$

Calcular límites a veces es un trabajo arduo que requiere de ingenio: emplear manipulaciones algebraicas, gráficas, las propiedades de los límites y la intuición.

También existen paquetes para computadora que pueden obtenerlos; éstos deben ser usados con precaución una vez que se ha comprendido el concepto de límite.

A continuación examinaremos otros ejemplos de manipulación algebraica para encontrar un límite.

Ejemplo.

Hallar $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{3 + h.} - \sqrt{3}}{h}$ (h ≠ 0 ; h ≥ 0)

Para hallar este límite recurriremos a nuestros conocimientos de álgebra. Multiplicaremos el numerador y el denominador de la fracción por una misma cantidad con lo que obtendremos una fracción equivalente, en la que el denominador no tienda a cero cuando h tienda a 0.

$$\frac{\sqrt{(3+h)}-\sqrt{3}}{h}=\frac{\sqrt{(3+h)}-\sqrt{3}}{h}\cdot\frac{\sqrt{(3+h.)}+\sqrt{3}}{\sqrt{3+h.)}+\sqrt{3}}=\frac{3+h-3}{h(\sqrt{3+h.}+\sqrt{3})}=\frac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}$$

Entonces:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h+3.}-\sqrt{3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to -2}\left[\dfrac{x^2-4}{x+2}\right]^3$

b) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}$

c) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2-\sqrt{h+4}}{h}$

3.2.3 LOS LÍMITES Y EL INFINITO

a) Funciones que Crecen o Decrecen sin Cota

El ejemplo siguiente se refiere a una función racional muy simple cuyo comportamiento es típico de muchas funciones.

Ejemplo.

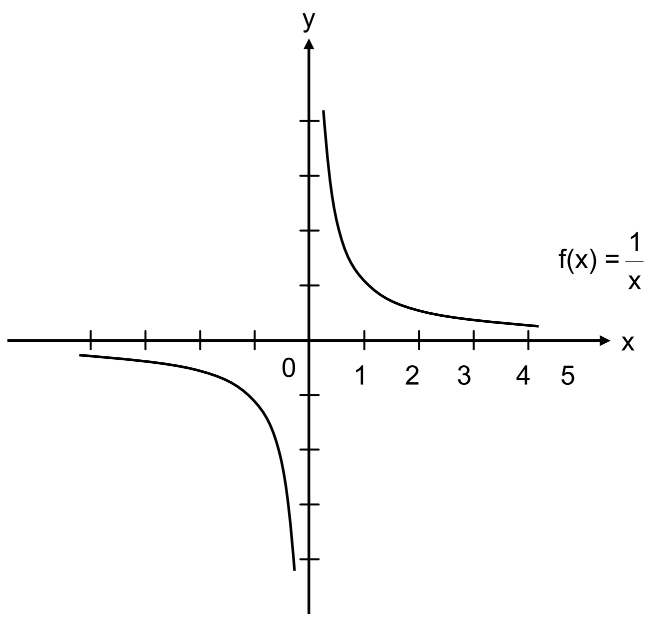
Investiguemos el límite de f (x) = 1/x cuando x tiende a cero aproximándonos a cero por la derecha y por la izquierda y bosquejemos la gráfica para visualizar la situación.

Completa la tabla siguiente (puedes usar una calculadora):

x	-1	-0.5	-0.2	-0.1	-0.01	-0.001
f(x)						

x	0.0001	0.001	0.01	0.1	0.2	0.5
f(x)						

construye la gráfica de f (x) y compárala con la siguiente figura.



¿Qué sucede con el valor de 1/x cuando x se aproxima a cero por la izquierda?

____

¿Qué sucede con el valor de 1/x si x se aproxima a cero por la derecha?

____

En realidad 1/x no se aproxima a ningún número real cuando x se aproxima a cero por la izquierda si no que se hace cada vez menor en el sentido del orden de los números reales (recuerda que de dos números reales negativos es menor el que tiene mayor valor absoluto, por ejemplo: $-9 < -3$).

En otras palabras 1/x decrece sin cota, "se va a $-\infty$". Este comportamiento se simboliza así:

$$\lim_{x \to 0} 1/x = -\infty \qquad ....(1)$$

Pero $-\infty$ no es un número real, entonces la función no tiene límite (finito) cuando x tiende a cero por la izquierda.

Cuando x se aproxima a cero por la derecha, el valor de 1/x aumenta cada vez más, es decir, crece sin cota, "se va a $+\infty$".

Esta forma de comportarse la denotamos de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to 0} 1/x = +\infty \qquad (2)$$

Como ∞ no es un número real, entonces la función no tiene límite (finito) cuando x tiende a cero por la derecha.

Observa la figura anterior, ¿cuáles son los límites laterales de 1/x por la izquierda y por la derecha cuando x tiende a 0? ____

Los "límites"(1) y (2) son llamados "límites infinitos"

¿Cuál es entonces el $\lim_{x \to 0} 1/x$? ____

Por una parte no existen los límites laterales finitos y por otra los "límites" laterales infinitos son distintos, así que

$\lim_{x \to 0} 1/x$ no existe.

Observa que hay otros casos en los que el limite no existe, diferentes a aquel que estudiamos en el ejemplo 4.

Discontinuidades Infinitas

Después de examinar el comportamiento de 1/x cuando x se aproxima a cero y analizar su gráfica, responde las siguientes preguntas:

¿La función 1/x es continua en x = 0?

-La discontinuidad que la función presenta en x = 0 es una discontinuidad infinita.

Se dice que una función tiene una discontinuidad infinita en *a* si los valores de la función crecen o decrecen sin cota cuando x se aproxima a (*a*) por la izquierda, por la derecha o por ambos lados

b) Asíntotas Verticales

Observa la gráfica de la función f (x) = 1/x en la figura anterior, ¿a qué recta se aproxima cuando x se aproxima más y más a cero desde la derecha o desde la izquierda?

Según la gráfica de 1/x, se aproxima a la recta vertical x = 0 (el eje "y"), a medida que x se aproxima a cero ya sea por la izquierda o por la derecha. Por eso se dice que la recta x = 0 es una asíntota vertical de la gráfica de 1/x.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Sea $g(t) = \dfrac{1}{(t-2)^2}$

a) Investiga $\lim\limits_{t \to 2} g(t)$ aproximándote a 2 por la izquierda y por la derecha.

b) ¿Cuál es el $\lim\limits_{t \to 2} g(t)$?

____

c) Bosqueja la grafica de la función g (t)

d) ¿Cuál es el asíntota vertical de la gráfica de $g(t) = \dfrac{1}{(t-2)^2}$?

____

c) Límite de una Función Cuando la Variable Independiente Tiende a Infinito

En la psicología, como en otras ciencias, se pretende hallar modelos matemáticos que describan el comportamiento de los fenómenos que ocurren dentro de su campo de acción. El cálculo es un valioso auxiliar para el análisis de tales fenómenos. El ejemplo siguiente se refiere a los efectos que la práctica repetida puede tener en la rapidez con que una persona realiza con éxito determinados actos.

Ejemplo.

Según el psicólogo L.L. Thurstone el número de actos exitosos por unidad de tiempo que una persona puede llevar a cabo después de practicar durante x sesiones pude ser descrito por la función

$$f(x) = \frac{a(x+c)}{(x+c)+b} \text{ ....(1)}$$

Supongamos que la persona z se encarga de empacar juguetes y que para ella a = 40, b = 4 y c = 1.

Examinemos cuántos juguetes empaca z en una hora a medida que practica cada vez más.

¿Cuál es la variable independiente de esta función?

____

Haremos variar independientemente el número x de sesiones para observar el efecto que se produce en el número de actos exitosos que z realiza.

Calcula el número de juguetes que empaca correctamente z después de 5 sesiones, 10 sesiones, 100, 1000, 10 000 sesiones de práctica.

¿Qué ocurre con el valor de f (x) (número de juguetes empacados correctamente) cuando x (número de sesiones de práctica)se hace más y más grande?

____

Para evaluar la función primero sustituimos a, b y c por 40, 4 y 1 respectivamente en la expresión (1), con lo que obtenemos la formula para la persona

$$f(x) = \frac{40x+40}{x+5}$$

Evaluando esta expresión en los valores solicitados obtenemos la siguiente tabla:

x	5	10	100	1000	10000
f(x)	24	29.3	38.476	39.841	39.984

Analiza la tendencia de los valores de la tabla.

Puede apreciarse en la tabla que cuando x se hace más y más grande, esto es, cuando x crece sin cota o mejor, cuando x tiende a infinito; f (x) se aproxima más y más a 40 este comportamiento se denota:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 40$$

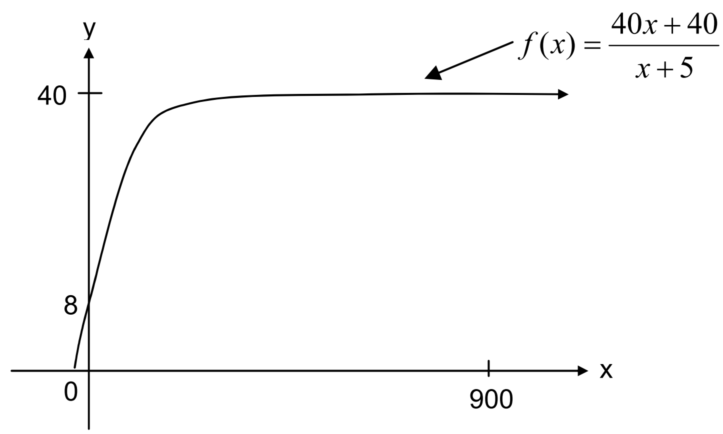
Lo que se lee: el límite de f (x) cuando x tiende a infinito es 40.

Entonces, aunque x aumente sin cota f (x) no aumenta ilimitadamente sino que tiene un límite que es 40.

¿Qué significado tiene, en el contexto del problema sobre el modelo de Thurstone, que el límite de f (x) sea igual a 40 cuando x tiende a infinito?

____

¿Qué aspecto tendrá la gráfica de una función que se comporta de esta manera? Para averiguarlo bosquejemos la gráfica empleando los valores de la tabla anterior.



d) Asíntotas Horizontales

Observa la gráfica de la función del ejemplo anterior, ¿qué sucede con la gráfica de f(x) cuando x se hace más y más grande? ______________________________

-La curva se aproxima cada vez más a una recta horizontal, la cual se llama asíntota horizontal de la curva.

¿Cuál es la ecuación de la asíntota horizontal de la gráfica de $f(x)=\dfrac{40x+40}{x+5}$

-La asíntota horizontal es la recta paralela al eje “x” para la cual y = 40. La ecuación de la asíntota horizontal es precisamente y = 40.

¿Qué significado tiene, en el contexto del problema sobre el modelo de Thurstone, que la asíntota horizontal sea y = 40?

Puede investigarse también lo que sucede cuando en una. función la variable independiente decrece sin cota, o sea, cuando tiende a $-\infty$.

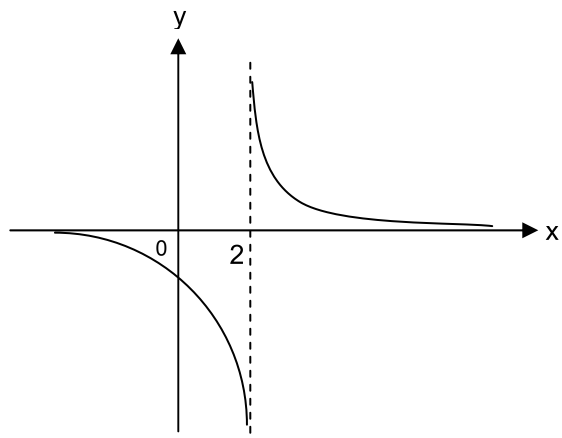
El siguiente enunciado nos dice cuando una recta es una asíntota horizontal de la gráfica de una función:

Si $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$, o ambos, entonces la línea y = L es una asíntota horizontal de la gráfica de la función f(x).

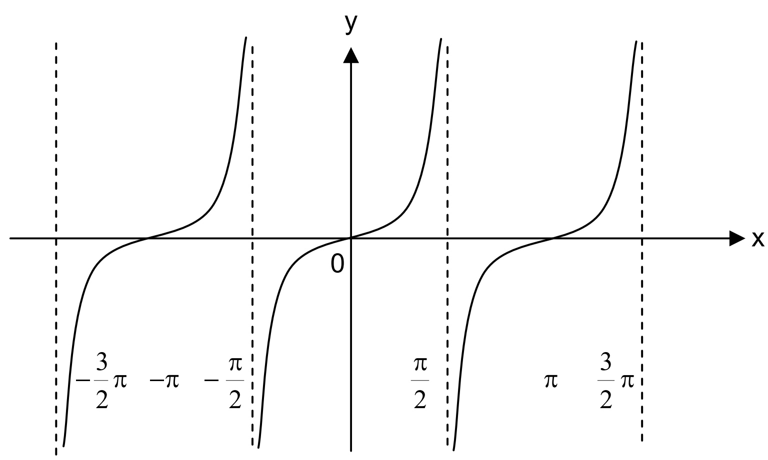
ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

1. Elabora una tabla que muestre la tendencia de $(1 + 1/h)^h$ cuando $h \rightarrow \infty$.
   Nota: al $\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/h)^h$ se le llama *e*. El valor de e está entre 2.718 y 2.719

2. Observa las gráficas en la figura 18. Identifica las asíntotas horizontales y las verticales. Anota las ecuaciones de las asíntotas.



(a)



(b)

e) Límites de Algunas Funciones Trascendentes

Las funciones que pueden expresarse en términos de un número finito de sumas, diferencias, productos, cocientes, potencias o raíces de polinomios se llama funciones algebraicas. Ejemplos de funciones algebraicas son las polinomiales y las racionales.

Las funciones que no son algebraicas como las trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, se dice que son trascendentes.

Analizaremos dos casos de límites de funciones trascendentes. Los siguientes dos ejemplos se refieren a una función exponencial y a una trigonométrica respectivamente.

Ejemplo.

Un grupo de ecólogos desean predecir lo que ocurrirá, al pasar el tiempo, con una población de animales en cierta región de la Tierra.

Después de analizar el comportamiento de los nacimientos, las muertes y la cantidad de alimento disponible, los matemáticos que los auxilian establecieron el siguiente modelo:

Sea A (t) el número de animales en el tiempo t en la región.

Supongamos que la cantidad de alimento es constante y suficiente siempre.

El numero de animales está dado por la ecuación:

$$A(t) = x_0 e^{-0.02t}$$

en donde x_0 es el número inicial de animales y *e* es el conocido número base de los logaritmo naturales cuyo valor aproximado es 2.71828[1].

El número –0.02 tiene que ver con el hecho de que hay menos nacimientos que muertes.

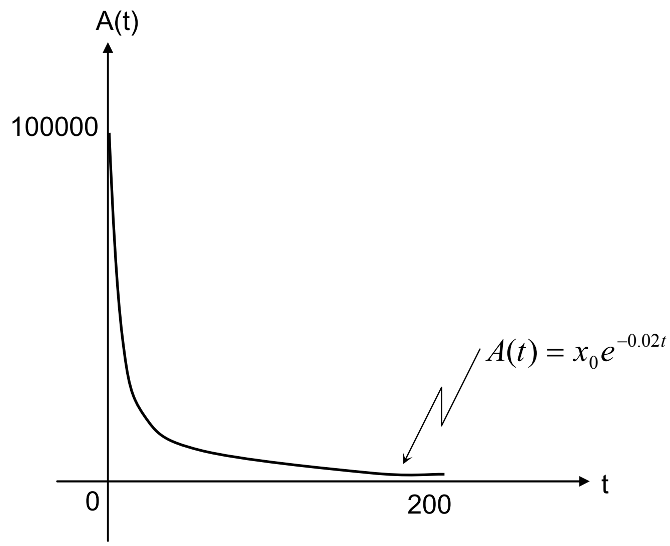
El número inicial de individuos es de 100 000.

A partir de este modelo los científicos intentan predecir el comportamiento del fenómeno.

Usando un paquete de software en una computadora obtuvieron la gráfica siguiente:

---

[1] El número e es una constante muy relacionada con los problemas humanos. Una de sus aplicaciones es la descripción del fenómeno del crecimiento de las poblaciones. Es un número trascendente.
No puede ser expresado completamente con un número finito de dígitos, ni como raíz de ecuación algebraica con coeficientes enteros, ni como decimal infinito periódico.
Si puede expresarse como $\lim_{x\to\infty}(1+h)^{1/h} = \lim_{x\to\infty}(1+1/h)^{h}$ el valor de e está entre 2.718 y 2.719



A partir de la observación de la gráfica responde la siguiente pregunta:

¿Qué crees que pasará con esta población "a la larga"?

____

Para apoyar o descartar tu conjetura estudiaremos la función

¿Has notado cuál es la variable independiente?

- Es t y está en el exponente.

Examinaremos la variación del número de individuos de la población para algunos valores del tiempo (determina tú los valores que faltan):

T(años)	0	1	5	10	20	50	100	200
A(t) (N° de animales)	100000	98019	90483	81873				1831

¿Cuál es la tendencia del número de individuos en esta población, al aumentar el número de años?

____

Lo que ocurre cuando t $\to \infty$ está dado por $\lim_{t \to \infty}(x_0 e^{-0.02t})$

Para obtener $\lim_{t\to\infty}(x_0 e^{-0.02t})$, usaremos las propiedades de los límites como sigue:

$$\begin{aligned}\lim(x_0 e^{-0.02t}) &= (\lim_{t\to\infty} x_0).(\lim_{t\to\infty} e^{-0.02t}) \\ &= x_0 \cdot \lim_{t\to\infty} ({}_0\, e^{-0.02\,t}) \\ &= x_0 \cdot \lim_{t\to\infty}[1/(e^{0.02t})]\end{aligned}$$

Cuando t crece sin cota, el valor de $e^{-0.02t}$ así lo hace, entonces $1/e^{0.02t}$ se aproxima a cero, ¿por qué? ____________________

así que: $\lim_{t\to\infty}[1/(e^{0.02t})] = 0$

entonces, $x_0 \cdot \lim_{t\to\infty}[1/(e^{0.02t})] = x_0 \cdot 0 = 0$

Por lo tanto: $\lim_{t\to\infty} x_0 (e^{-0.02t}) = x_0 \cdot 0 = 0$

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Responde las siguientes preguntas con base al resultado del ejemplo correspondiente a la población de animales.

¿Qué pasará “a la larga” con la población que estamos estudiando?

____

¿Qué crees que harán los ecólogos después de analizar estos resultados?

____

¿Qué harías tú?

____

Analiza el siguiente ejemplo correspondiente a otra función exponencial.

Ejemplo.

El estudiante Daniel H. ganó $1,000.00 en un concurso y decidió invertirlos por un año a una taza de interés anual del 15% = 0.15 compuesto mensualmente.

Si el interés es compuesto m veces al año, el capital o monto compuesto después de un año está dado por la fórmula.

$$A = 1000\left(1 + \frac{0.15}{m}\right)^{m} \qquad (1)$$

Si es (1) sustituimos a m por 12 obtenemos

$$A = 1000\left(1 + \frac{0.15}{12}\right)^{12} = 1{,}160.754518$$

Por lo tanto al final del primer año el monto será de $1,160.754518, que redondeado a centavos es $1,160.75

Daniel piensa que ganaría mucho más si el interés se compusiera diariamente y más aún si se compusiera instantáneamente.

Si la composición del interés fuera instantánea, ¿cuántos periodos habría en un año?

- El número m de periodos tendería a infinito y para calcular el monto en este caso sería necesario obtener:

$$\lim_{m\to\infty} = \left\{1000\left(1 + \frac{0.15}{m}\right)^{m}\right\} \text{..........(1)}$$

Para calcular este limite expresamos al exponente *m* como *m* = (*m* /0.15) 0.15, entonces escribimos el monta A en la siguiente forma:

$$A = 1000\left\{\left(1 + \frac{0.15}{m}\right)^{(m/0.15)0.15}\right\}$$

Sea $\frac{0.15}{m} = h$, entonces $\frac{m}{0.15} = \frac{1}{h}$. Considerando esto, tenemos:

$A = 1000\ [(1 + h)^{(1/h)0.15}]$

Por otra parte, si m $\to \infty$, h $\to$ 0, así que

$$\lim_{m\to\infty} = \left(1+\frac{0.15}{m}\right)^{m/0.15} = \lim_{h\to\infty}(1+h)^{1/h}$$ ...que es precisamente el número e

Por lo tanto,

$$A = 1000\left\{\left(1+\frac{0.15}{m}\right)^{(m/0.15)0.15}\right\} = 1000e^{0.15}$$

Así que para el caso del interés del 15% anual compuesto continuamente, el monto A de un capital inicial de $1,000.00 es:

$$A = 1000\ e^{0.15} \ldots (a)$$

Tomando e = 2.718281828 y efectuando las operaciones se obtiene

$$A \approx \$1,161.83$$

que es la cantidad que Daniel obtendría al final del primer año si el interés se compusiera continuamente.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Convierte la expresión (a) en una fórmula para obtener el monto compuesto A que se obtiene al invertir un capital inicial P a un interés anual i compuesto continuamente durante un año.

Solución $A = P\,e^{i}$

Analiza el siguiente ejemplo correspondiente a una función trigonométrica.

Ejemplo.

Un jugador de foot ball americano patea el balón imprimiéndole una trayectoria que forma un ángulo θ =40° con el piso y una velocidad v = 30 m/s. ¿Qué distancia recorre la pelota en el aire? ¿Qué ocurre con la distancia cuando el ángulo θ se acerca a 90° si la velocidad inicial es la misma?

Puede comprobarse que la distancia que recorrerá la pelota en el aire si no encuentra obstáculos está dada por la fórmula

$$d = \frac{v^2 \mathrm{sen} 2\theta}{g}$$

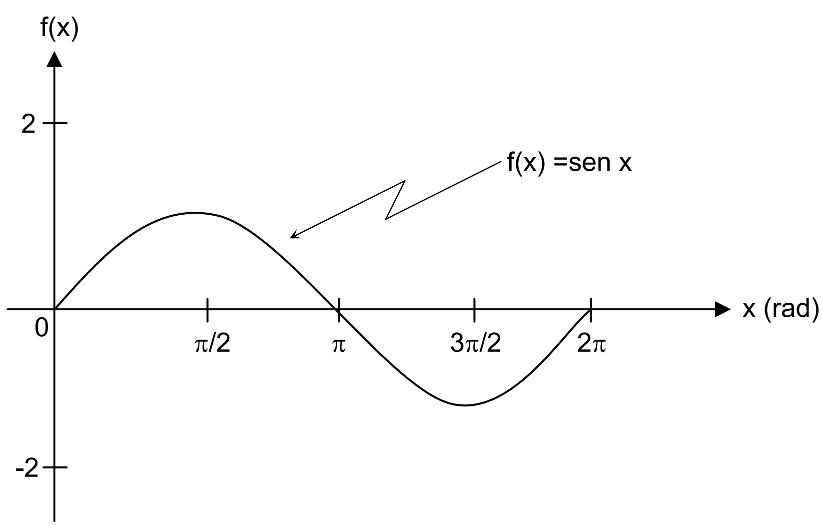
En donde $g = 9.8m/s^2$ g es la aceleración de vida a la gravedad.
Para responder a la primera pregunta calcula d para los datos del problema.

Con la ayuda de una calculadora o de tablas de funciones trigonométricas obtendrás
$d \approx 90.44$ m

Para ver qué valor se aproxima d cuando Θ se aproxima a 90^0 investigaremos

$$\lim_{\theta \to 90^0} = \frac{(30)^2 \ \mathrm{sen} 2\theta}{9.8}$$

En esta ocasión nos ayudaremos de la gráfica de la función seno que aparece en la siguiente figura.



El valor de *d* depende del valor del ángulo θ.

¿A qué valor se aproxima 2θ cuando θ se acerca a 90°?

Obviamente 180° = π rad

Ahora veamos en la figura anterior el valor al que se aproxima sen 2θ.

cuando θ se aproxima a 90° = $\pi/2$ rad.

Según la figura: $\lim\limits_{\theta\to 90^0} = 2\theta = 0$

Entonces, usando las propiedades de los límites (límite de un producto y límite de un cociente):

$$\lim_{\theta\to 90^0} = \frac{30^2\ \text{sen}2\theta}{9.8} = 0$$

Así que, ¿a qué número se aproxima la distancia cuando el ángulo θ tiende a90°?

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

1) Realiza una investigación que te permita responder la siguientes preguntas:

¿A qué valor se aproxima la distancia que recorre el balón cuando al ángulo θ tiende a cero grados?

---

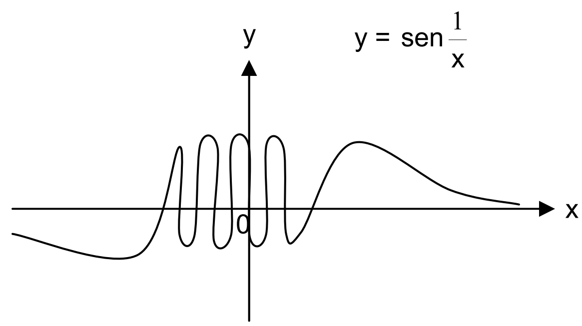
2) Calcula a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}\,x}{x}$ y b) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos h - 1}{h}$ aproximándote numéricamente.

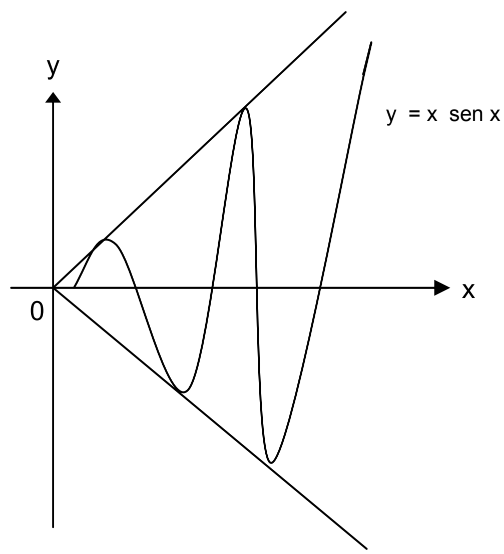
Solución: a) 1 b) 0

Para finalizar observemos algunos casos de límites de funciones trigonométricas que no existen.

$$1)\ \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x} \qquad y \qquad 2)\ \lim_{x \to \infty} x \operatorname{sen} x$$

La gráfica de $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ y $x \operatorname{sen} x$ aparecen en la siguiente figura. La primera función oscila acotadamente y la segunda oscila en forma no acotada.





EXPLICACIÓN INTEGRADORA

En este tema se abordaron los conceptos que se muestran en el siguiente cuadro sinóptico.

- Continuidad de una función
  - Función continua
    - Continuidad de función en un punto
    - Continuidad de una función en un intervalo
    - Continuidad de una función polinomial
    - Continuidad de una función lineal
  - Técnicas algebraicas para calcular límites
    - Límites de funciones polinomiales
    - Límites de funciones racionales
    - Límites de funciones trascendentes
    - Propiedades de los límites
  - Los límites y el infinito
    - Funciones que crecen o decrecen sin cota
    - $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$
    - Asíntotas horizontales
    - Asíntotas verticales

RECAPITULACIÓN

Hemos estudiado en este capítulo las ideas básicas relativas a límites y continuidad de funciones de una manera intuitiva, sin rigor; en cursos superiores podrás demostrar los enunciados que aquí aceptamos como verdaderos a partir del análisis de casos particulares.

Los principales resultados a los que llegamos son los siguientes:

1. Sea f una función. Si cuando la variable independiente x se aproxima al número a con valores menores que a, f (x) se aproxima a el número L, entonces decimos que L es el límite de f por la izquierda, cuando x tiende a a.
   Si al aproximarse x a *a* con valores mayores que a, f (x) se aproxima a el número M, se dice que M es el límite de f, cuando x tiende a *a* por la derecha.
   Se emplea la siguiente notación para los límites por la izquierda y por la derecha respectivamente:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = M \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

2. Cuando se dice que el límite de una función f (x), cuando x tiende a un número real *a*, es el número real L, o, simbólicamente

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

   debemos entender que cuando x se aproxima a *a*, tanto por la izquierda como por la derecha, pero no es igual a *a*, entonces f (x) se aproxima a L.

3. Si $\lim_{x \to a+} f(x) \neq \lim_{x \to a-} f(x)$ entonces no existe el límite de cuando x tiende a *a.*

4. La gráfica de una función es continua sobre un intervalo, si su gráfica sobre ese intervalo puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel. Si una gráfica está desconectada en x = a se dice que es discontinua en x = a.

5. Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a *a*, la función f es continua en *a* si, y sólo si

   a) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe; b) f (a) existe y c)) $\lim_{x \to a} f(x)$ = f (a)

6. Si f es una función polinomial, entonces $\lim_{x \to a} f(x)$ = f (a) para todo número real *a*.

7. Las funciones polinomiales son continuas para toda $x \varepsilon R$.

8. El límite de una función racional f, cuando $x \to a$, puede hallarse evaluando f (a) siempre que *a* este en su dominio, es decir, que no se anule el denominador cuando x = a. En los valores de x que anulan el denominador el límite, si existe, puede ser obtenido con frecuencia mediante manipulaciones algebraicas.

9. Las funciones racionales son continuas en todos los números reales, excepto en aquellos que hacen cero su denominador. Son continuas en su dominio, que excluye dichos puntos.

10. a) Si c es una constante, $\lim_{x \to a}$ c = c para cualquier real *a*.

    b) Suponiendo que los límites de las funciones f y g cuando $x \to a$ son ciertos números L y M respectivamente.

- $\lim_{x \to a} \{ f(x) + g(x) \} = L + M$
- $\lim_{x \to a} \{ f(x) - g(x) \} = L - M$
- $\lim_{x \to a} \{ f(x) \cdot g(x) \} = L.M$
- $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ si $M \neq 0$
- $\lim_{x \to a} kf(x) = kL$ para cualquier constante k
- $\lim_{x \to a+} [f(x)]^n = L^n$ en donde *n* es un entero positivo.
- $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ con *n* entero positivo y L > 0 si *n* es par.

11. Se dice que una función tiene una discontinuidad infinita en *a* si los valores de la función crecen o decrecen sin cota cuando x se aproxima a *a* por la izquierda, por la derecha o por ambos lados.

12. Si f (x) no se aproxima a ningún número real cuando x se aproxima a *a*, si no que decrece sin cota (“se va a -∞”), lo cual se simboliza así:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

como -∞ no es un número real, entonces la función no tiene límites (finito) cuado $x \to a$.

Si cuando x se aproxima a *a*, el valor de f (x) crece sin cota (“se va a +∞”) , lo que denotamos de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x} = +\infty,$$

entonces la función no tiene límites (finito) cuando $x \to a$.

13. Si f (x) crece o decrece sin cota cuando x se aproxima a *a*, por la izquierda, por la derecha o por ambos lados, entonces la gráfica de la función f se aproxima la recta vertical x = a. Se dice que la recta x = a es una *asíntota vertical* de la gráfica de f.

14. Dada una función f, si cuando x crece sin cota o mejor, si cuando x tiende a infinito f (x) se aproxima más y más a un número real L, se dice que :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Entonces la gráfica de f se aproxima a la recta y = L y se dice que esta recta es una *asíntota horizontal* de la gráfica de f.

Más generalmente:

15. Si $\lim_{x \to \infty +} f(x) = L$ ó $\lim_{x \to \infty -} f(x) = L$, o ambos, entonces la línea y = L es una asíntota horizontal de la gráfica de la función f.

16. Las funciones que pueden expresarse en términos de un número finito de sumas , diferencias, productos, cocientes, potencias o raíces de polinomios se llaman funciones algebraicas. Ejemplos de funciones *algebraicas* son las polinomiales y las racionales.
    Las funciones que no son algebraicas como las trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, se dice que son *trascendentes*.

17. El número e es una constante muy relacionada con los problemas humanos. Es un número trascendente, no puede ser expresado completamente con un número finito de dígitos, ni como raíz de una ecuación algebraica con coeficientes enteros, ni como decimal infinito periódico; pero si puede expresarse así:

$$e = \lim_{h \to 0} (1+h)^{1/h} = \lim_{n \to \alpha} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$ el valor de *e* está entre 2.718 y 2.719.

18. Si un monto P es invertido a la tasa de interés anual *i*, compuesto *m* veces al año, en *t* años, entonces el monto A está dado por

$$A = P\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mt}$$

19. El monto compuesto A que se obtiene al invertir un capital inicial P a un interés anual *i* compuesto continuamente durante un año está dado por la fórmula:

$$A = P\,e^{i}$$

20. Los siguientes límites existen:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

ACTIVIDADES INTEGRALES

A continuación te presentamos una serie de actividades que te servirán para reafirmar tus conocimientos, si tienes alguna duda consulta a tu asesor de contenido.

1. Calcula los siguientes límites si existen , se lo contrario explica por qué no existen:

a) $\lim_{x \to 3} 5\left(x^3 + \frac{1}{2}x\right)$

b) $\lim_{x \to 6} \sqrt[3]{6x^2}$

c) $\lim_{x \to -3} \frac{h^3 + 27}{h + 3}$

d) $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

e) $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$

2. Sea $f(x) = \frac{1}{x-1}$

a) Investiga:

i) $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$ ii) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{|x-1|}$

b) Bosqueja la gráfica de la función.

c) A partir de la inspección de la gráfica siguiere las ecuaciones de sus asíntotas verticales y sus asíntotas horizontales.

3. a) Calcula el monto A, que después de un año se obtiene al invertir un capital inicial de $ 5000 a un interés del 12% anual compuesto continuamente.

   b)¿Cuál sería el monto después de tres años?

4. Supongamos que el valor C, en nuevos pesos, de un automóvil después de t años está dado por:

$$C(t) = 300000 + \frac{5000}{50.04t}$$

   a) ¿Cuál fue el valor inicial del automóvil?

   b) ¿Qué ocurre con el precio C del automóvil cuando el tiempo tiende a infinito?

5. Un jugador de golf golpea la pelota impulsándola con una velocidad inicial v =35 m/s y una trayectoria de θ grados. Si la distancia que la pelota recorre en el aire esta dada por la ecuación

$$d = \frac{v^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}$$

   en donde g = 9.8 es la aceleración debido a la gravedad de la Tierra

   ¿para qué valor de θ se consigue la máxima distancia?

6. Determina el valor del siguiente límite, utilizando las propiedades de los límites y construyendo la gráfica de la función.

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\cosh + 1}$$

AUTOEVALUACIÓN

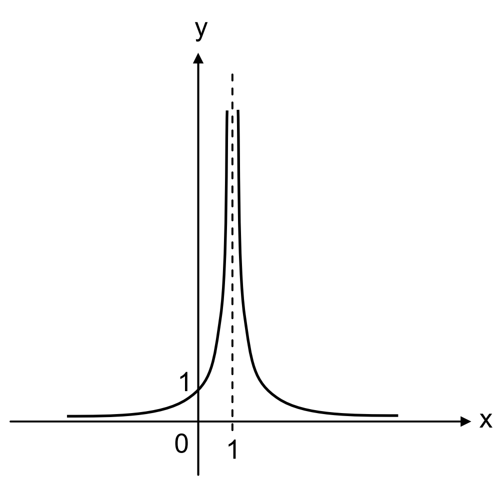
A continuación te presentamos las respuestas a las actividades de consolidación compáralas con las tuyas y si encuentras diferencias verifica los procedimientos qué utilizaste.

1. a) 142.5 b) 6 c) 27 d) $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\left(3x^2 + 3xh + h^2\right) = 3x^2$

   e) El límite no existe por que los límites por la izquierda y por la derecha cuando x se aproxima a cero son -1 y 1 respectivamente, es decir, son distintos.

2. a) i) $\lim_{x\to 1}\frac{1}{|x-1|} = \infty$ ii) $\lim_{x\to \alpha}\frac{1}{|x-1|} = 0$

   b) Gráfica.



c) Asíntota vertical $x = 1$; asíntota horizontal $y = 0$.

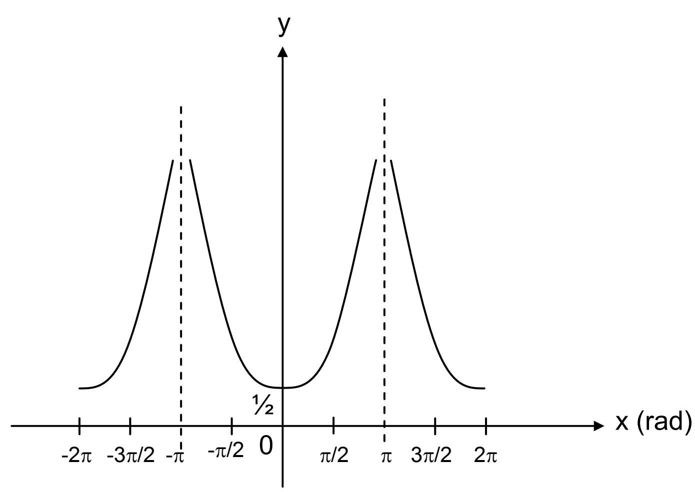
3. a) $A \approx \$ 5637.48$ b) $A \approx \$ 7166.56$

4. a) Si $t = 0$, $C = \$300,000.00$

   b) Cuando t tiende a infinito $C(t) = 300000 + \dfrac{5000}{50.04t}$ tiende a 30000 por lo que la fracción $\dfrac{5000}{50.04t}$ tiende a cero.

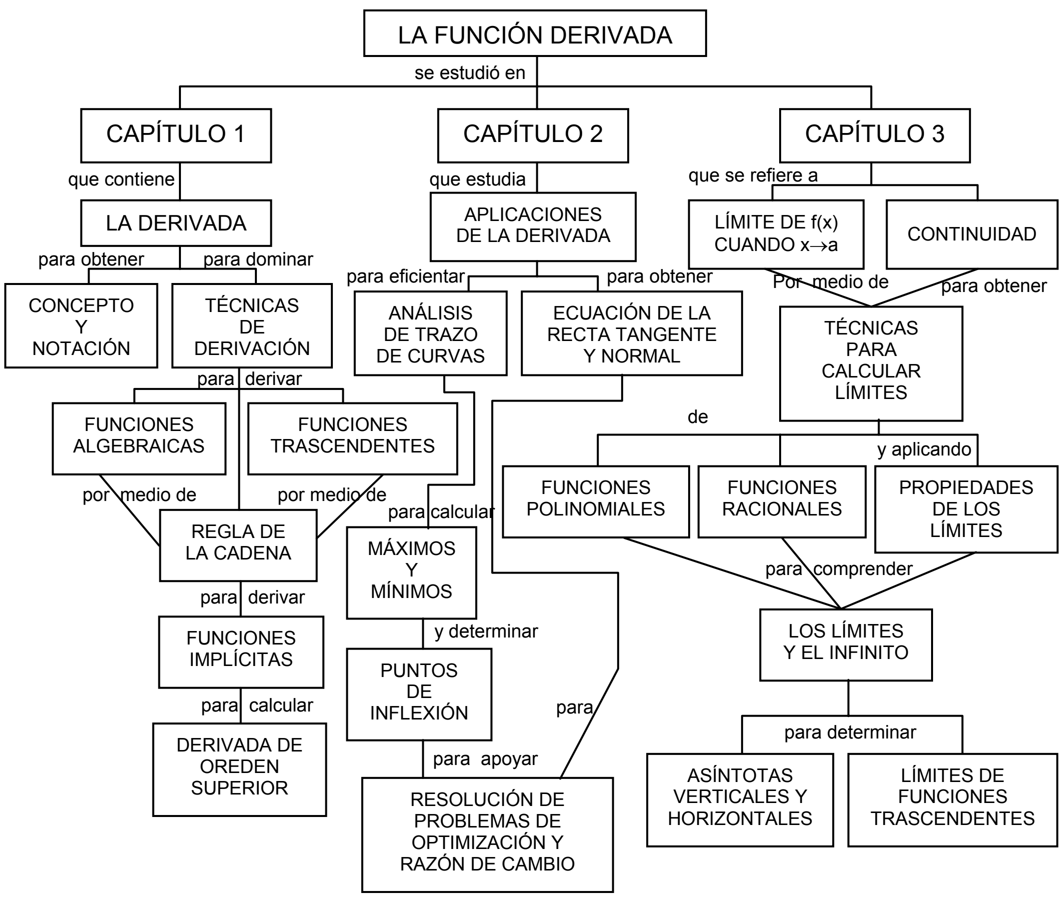
5. Para $\theta = 45º$

6. Por medio de las propiedades de los límites se obtuvo que el valor de $\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{\cos h+1}$ es 1/2 y su representación gráfica es la siguiente figura.



RECAPITULACIÓN GENERAL

Has concluido el estudio del fascículo 2 “La Función Derivada” y a la vez has terminado el curso de “Cálculo Diferencial e Integral I”. Analiza el siguiente diagrama que resume los contenido del fascículo, esto te ayudará a integrar y organizar los conceptos y procedimientos que estudiaste.



ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN

Realiza los siguientes ejercicios.

1. Obtener la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(t) = -2t^7 + 12t^4 - 11t^3 + 3t + 2$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^5} \cdot \sqrt[5]{x^3}$

c) $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 - 1}$

d) $y = (3x^2 - 4)(4x^3 + x - 1)$

e) $f(x) = \sqrt{\tan 4x}$

f) $g(t) = \operatorname{sen}^3 t$

g) $g(t) = \ln(e^{3t})$

h) $y = \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}}$

2. A partir de las siguientes ecuaciones calcula y', aplicando la derivación implícita.

a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$

b) $4xy^3 - x^2y + x^3 - 5x + 6 = 0$

3. Dadas las siguientes funciones, calcula en cada caso f' y f''.

a) $f(x) = (3x + 1)^{\frac{1}{2}}$

b) $f(x) = \text{sen } x$

c) $f(x) = 2x^5 - 4x^2 + 7x + 6$

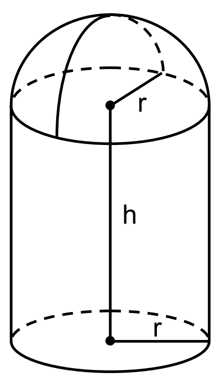
4. Resuelve los siguientes problemas.

a) Un tren recorre $f(t) = t^2 + 30t$ Km después de "t" horas; ¿con qué rapidez se mueve después de 2 horas?

b) La población de una comunidad en "t" años está dada por $R(t) = 60000(t^{1/2} + 2)$, ¿a qué ritmo aumenta la población cuando t = 9?

c) Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^4 - 3x + 1$ en (1,–1).

d) Un contenedor tiene forma de cilindro con una cubierta hemisférica. Hallar las dimensiones, si su volumen se mantiene constante $V = 18\pi$, para que su área sin considerar el piso sea mínima.



5. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \to 3} (7 - 3x)$

b) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

c) $\lim_{t \to 1} \sqrt{\dfrac{8t+1}{t+3}}$

d) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{3}{x^3}$

6. Trace la gráfica de la función y determine los puntos de discontinuidad, compruebe su respuesta usando la definición de continuidad de una función en un punto.

a) $f(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2 + t - 6}{t+3} & \text{si } t \neq -3 \\ 1 & \text{si } t = -3 \end{cases}$

b) $g(x) = \dfrac{x}{x-3}$

c) $h(x) = \dfrac{|x|}{x}$

7. Obtener las asíntotas horizontales de las gráficas de las funciones siguientes.

a) $h(t) = 1 - \dfrac{1}{t}$

b) $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$

8. Obtener las asíntotas verticales de las gráficas de las siguientes funciones.

a) $g(x) = \dfrac{-2}{x+3}$

b) $f(x) = \dfrac{-2}{(x+3)^2}$

AUTOEVALUACIÓN

Compara los resultados que obtuviste al realizar las actividades de consolidación con las siguientes soluciones, si tienes dudas consulta con tu asesor de contenido.

1. a) $f'(t) = -14t^6 + 48t^3 - 33t^2 + 3$

   b) $f'(x) = \dfrac{16}{15}x^{1/15}$

   c) $y' = \dfrac{-6x^2}{(x^3-1)^2}$

   d) $y' = 60x^4 - 39x^2 - 6x - 4$

   e) $f'(x) = \dfrac{2\sec^2 4x}{\sqrt{\tan 4x}}$

   f) $g'(t) = 3\,\text{sen}^2 t \cos t$

   g) $g'(t) = 3$

   i) $y' = \dfrac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\left[1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right]$

2. a) $y' = -\dfrac{y^2}{x^2}$

   b) $y' = \dfrac{5 - 3x^2 + 2xy - 4y^3}{12xy^2 - x^2}$

3. a) $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$, $f'(x) = \dfrac{-9}{4\sqrt{(3x+1)^3}}$

b) $f'(x) = \cos x$, f''(x) = -sen x

c) $f'(x) = 10x^4 - 8x + 7$, $f'(x) = 40x^3 - 8$

4. a) f'(2) = 34 km/h

b) A un ritmo de R'(4) = 10,000 individuos por año.

c) y = x – 2

d) r = 3 ; h = 0

5. a) –2

b) 6

c) 3/2

d) +∞

6. a) –3 , $\lim\limits_{x \to -3} f(t) \neq t(-3)$

b) 3

c) 0

7. a) y = 1

b) y = 2

8. a) x = –3

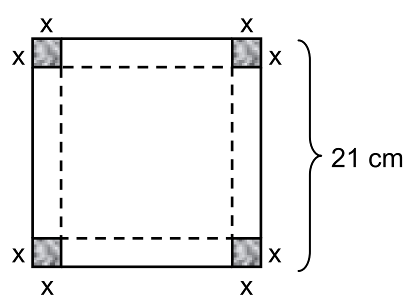
b) x = –3

ACTIVIDADES DE GENERALIZACIÓN

Realiza las siguientes actividades y verifica tus resultados.

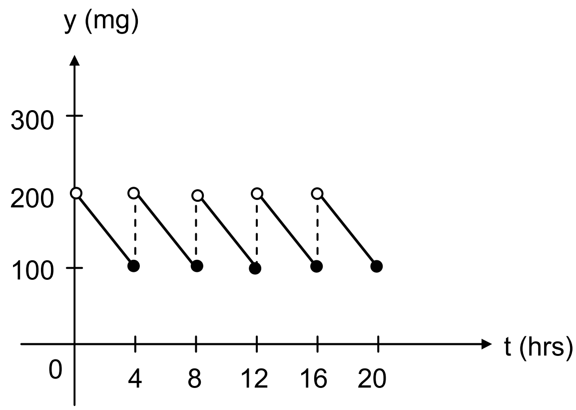
1. Se va a cortar una viga rectangular de un tronco de sección transversal circular. Si la resistencia de la viga es proporcional al producto de su anchura por el cuadrado de su altura, encuentre las dimensiones de la sección transversal que da la viga de mayor resistencia.

2. A partir de un trozo cuadrado de cartulina de 21 cm por lado, construye una caja de base cuadrada sin tapa que pueda contener el máximo volumen de arroz.
   Recorta el trozo de cartulina en sus esquinas como se muestra en la figura siguiente:



   Recorta los cuadrados sombreados y después dobla sobre la línea punteada para construir tu caja.
   La medida “x” tu la vas asignar arbitrariamente. Construye otras cajas para diferentes medidas de “x” y prueba cual de ellas tiene mayor capacidad.
   ¡Consigue un kilo de arroz!
   Después resuelve el problema analíticamente, es decir, utiliza lo que aprendiste en este fascículo para resolverlo. Compara los dos procedimientos ¿Qué conclusión obtienes?

3. Un paciente recibe una dosis inicial de 200 mg (miligramos) de cierto medicamento, posteriormente se le administran dosis de 100 mg cada 4 horas. La figura muestra la cantidad y(t) del medicamento en la sangre a las “t” horas. Calcule e interprete $\lim_{t \to 8^-} y(t)$ y $\lim_{t \to 8^+} y(t)$.



BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

AYRES, Frank. Cálculo Diferencial e Integral. McGraw-Hill. México, 1989.

BOSH, Carlos. Cálculo Diferencial e Integral. PCSA México, 1988.

DEL GRANDE, Duff. Introducción al Cálculo. Ed. Harla, México.

GRANVILLE, William. Cálculo Diferencial e Integral. Ed. Limusa, México.

HOCKETT, S./Sterstein, M. Cálculo por Objetivos y Aplicaciones. CECSA. México, 1982.

LANG, Serge. Cálculo. 5ª Edición. Addisson Wesley Ibero Americana. México, 1990.

LEITHOLD, Louis. Cálculo con Geometría Analítica. 7ª Ed. Oxford University Press. México, 2001.

MENDELSON, Ayres. Cálculo Diferencial e Integral. Mc Graw Hill. México.

PURCELL, Edwin/Warberg, Dale. Cálculo Diferencial e Integral. 2ª Edición. Prentice Hall. 1993

SANTALO, Marcelo. Cálculo Diferencial e Integral. Textos Universitarios. México, 1987.

STROBL, WALTER. Matemática. Diccionario Riodvero. México, 1980.

SWOKOWSKI, Earl. Introducción al Cálculo con Geometría Analítica. 2ª Edición. Grupo Editorial Ibero América.

ZILL, Dennis. Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Editorial Ibero América.

DIRECTORIO

Jorge González Teyssier
Director General

Javier Guillén Anguiano
Secretario Académico

Francisco Lara Almazán
Coordinador Sectorial Norte

Alfredo Orozco Vargas
Coordinador Sectorial Centro

Héctor De Ita Montaño
Coordinador Sectorial sur

Álvaro Álvarez Barragán
Coordinador de Administración Escolar y del Sistema Abierto

José Noel Pablo Tenorio
Director de Asuntos Jurídicos

Ma. Elena Solis Sánchez
Directora de Información y Relaciones Públicas

Lilia Hinnelstine Cortés
Directora de Planeación Académica

Mario Enrique Martínez De Escobar y Ficachi
Director de Extensión Cultural

María Elena Saucedo Delgado
Directora de Servicios Académicos

Ricardo Espejel
Director de Programación

Francisco René García Pérez
Director Administrativo

Jaime Osuna García
Director de Recursos Financieros