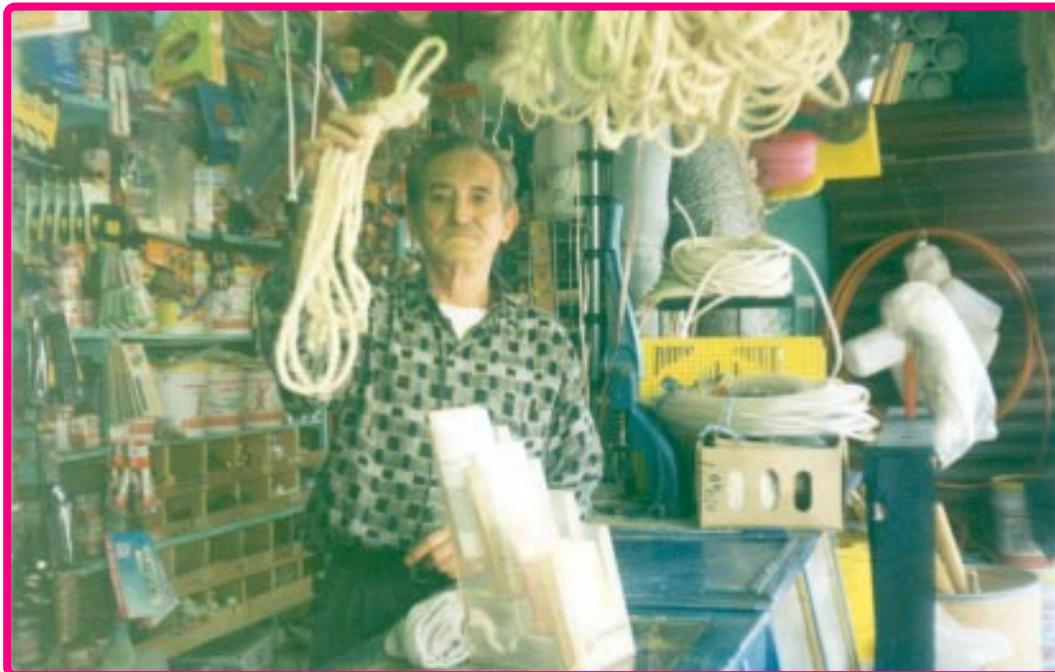
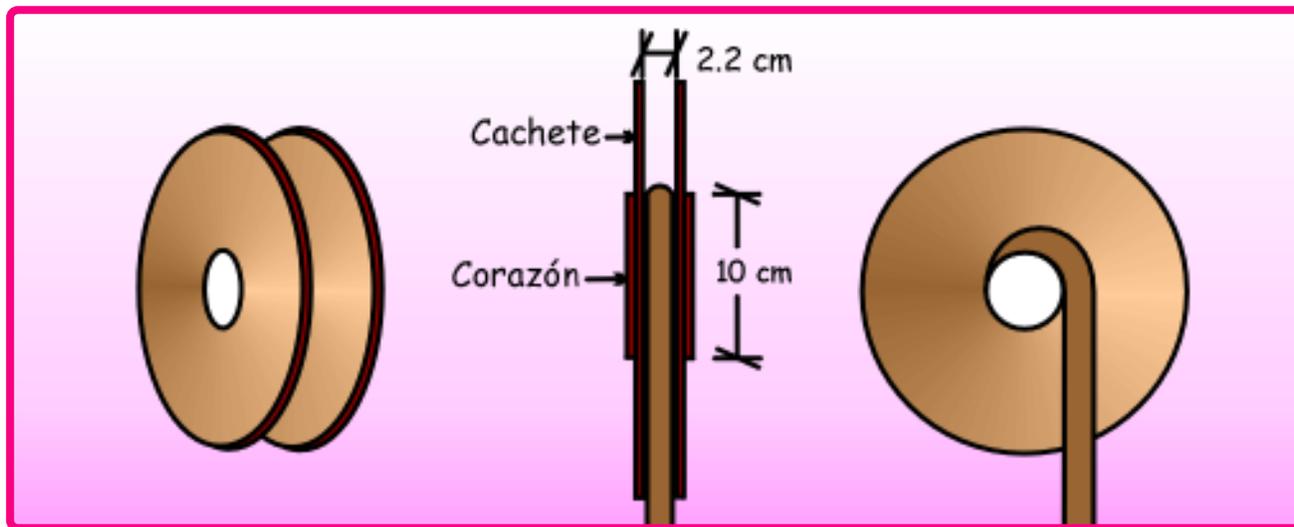


Tema 4

Series numéricas

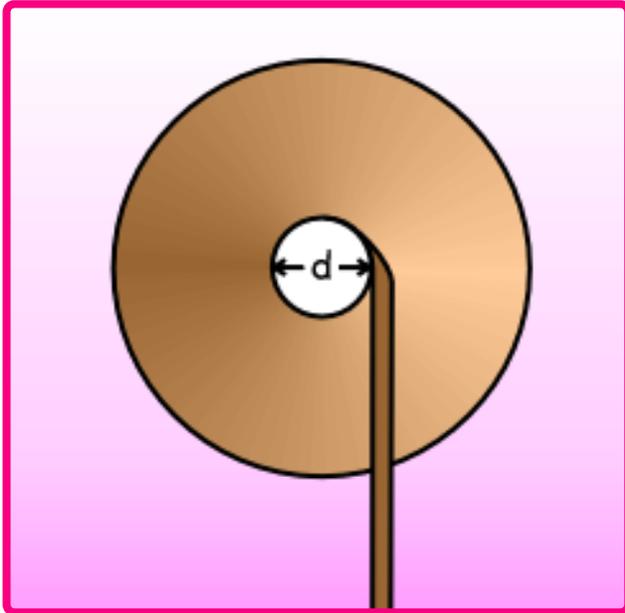


Marcelo, de vez en vez, usa una reata de 10 m de largo y 2 cm de grueso para medir el contorno de los terrenos que fumiga. Para que la reata que usa no se eche a perder y además la pueda guardar, decide construir un carrete como el que se muestra en el dibujo.

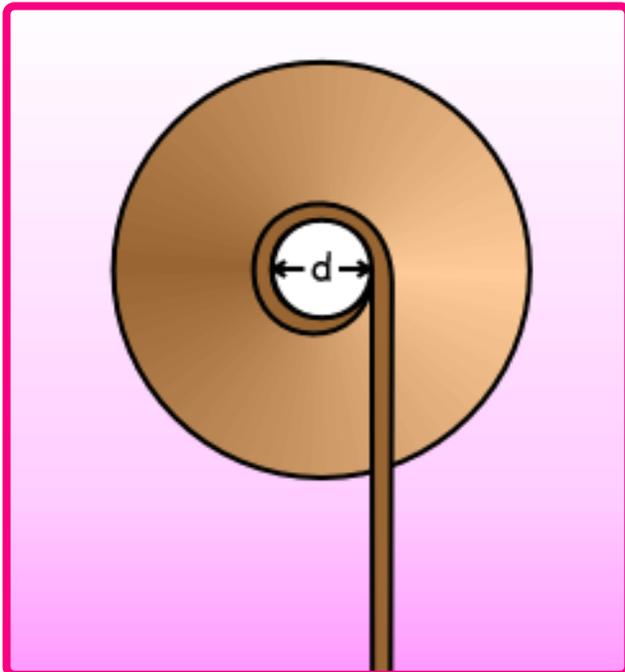


¿Cuál debe ser el diámetro de los cachetes del carrete si el corazón es un tubo corto de 10 cm de diámetro exterior?

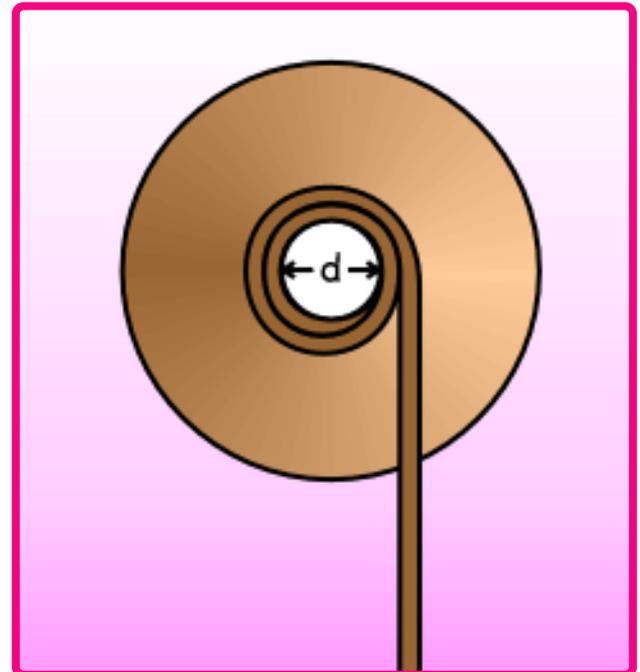
Para resolver este problema, Marcelo recuerda que la fórmula del perímetro del círculo es πD (pi por diámetro), por lo que con cada vuelta que dé la cuerda, en el carrete enrollará πD longitud, pero en cada vuelta el diámetro (D) aumentará 2 veces el espesor (E). Observe usted:



Sin vuelta, no se ha enredado nada.



Vuelta 1: $D = d$, tomando el diámetro interior como inicio.



Con dos vueltas:
 $D = d + 2E$.

Marcelo, para no confundirse, hace una tabla como la siguiente:

No. de vuelta	Diámetro	Diámetro en la vuelta indicada	Longitud enrollada (p x D)	Suma de lo enrollado	Observaciones
1	$d + [0 (2E)]$	$10 + 0 = 10$	31.4	31.40	Se toma el diámetro interno
2	$d + [1 (2E)]$	$10 + 4 = 14$	43.96	75.36	Se cuenta el espesor de la cuerda en cada lado
3	$d + [2 (2E)]$	$10 + 8 = 18$	56.52	131.88	Recuerde que $E = 2$, porque es el espesor de la cuerda
4	$d + [3 (2E)]$	$10 + 12 = 22$	69.08	200.96	
5	$d + [4 (2E)]$	$10 + 16 = 26$	81.64	282.60	
6	$d + [5 (2E)]$	$10 + 20 = 30$	94.20	376.80	
7	$d + [6 (2E)]$	$10 + 24 = 34$	106.76	483.56	
8	$d + [7 (2E)]$	$10 + 28 = 38$	119.32	602.88	
9	$d + [8 (2E)]$	$10 + 32 = 42$	131.88	734.76	
10	$d + [9 (2E)]$	$10 + 36 = 46$	144.44	879.20	
11	$d + [10 (2E)]$	$10 + 40 = 50$	157.00	1,036.20	En esta vuelta, antes de terminar, se enrollan los 10 m.

Con lo anterior, Marcelo sabe que con un poco menos de 11 vueltas logrará enredar toda su cuerda y el diámetro de los cachetes de su carrete será de 50 cm por lo menos.

Como se puede observar cada vez que se da una vuelta al carrete, su diámetro aumenta 4 cm debido a que la cuerda mide 2 cm de grueso y así se aumenta el diámetro en:

10, 14, 18, 22, ... 50

A un conjunto de números o literales ordenados de tal manera que cualquiera de ellos puede ser definido por su antecesor o por el que le sigue mediante una regla se le llama *serie*.

En el caso del carrete de Marcelo, la regla es muy sencilla, pues al analizar los números nos damos cuenta que para conocer qué sigue de otro, es suficiente con sumarle 4, o que para conocer el número anterior se logra al restar 4.

Si se observa la tabla que construyó Marcelo, la serie que obtuvo se puede expresar de la siguiente manera:

$$S = d, d + [1 (2 E)], d + [2 (2 E)], d + [3 (2 E)]..., d + [n-1(2 E)]$$

Cada uno de los elementos de esta serie se llaman *términos*, y se simbolizan por la literal "n", así se tiene que:

$$\begin{array}{cccccc} \text{Serie} = & d, & d + [1 (2 E)], & d + [2 (2 E)], & d + [3 (2 E)]..., & d + [n-1(2 E)] \\ \text{Términos} & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{n} \end{array}$$

Si se observa, "d" es el diámetro inicial, y la cantidad que se aumenta queda definida por (n-1) multiplicado dos veces por el grueso de la cuerda, en este caso, es 2. Así, cualquier término de la serie estará definido por:

$$u_n = d + [(n-1) (2 E)]$$

Con esta fórmula se puede conocer cualquier término sin necesidad de tener el anterior o posterior.

Ejemplo

El término 7 de la serie de Marcelo es:

$$\begin{array}{l} d = 10 \text{ cm} \\ n = 7 \\ E = 2 \text{ cm} \end{array}$$

$$\text{fórmula de la serie} = d + [(n-1) (2 E)]$$

sustituyendo, el término 7 será:

$$10 + [(7-1) (2 \cdot 2)] = 10 + [6 \cdot 4] = 10 + 24 = 34$$

Con esto, Marcelo ya no tuvo que conocer los primeros 6 términos para determinar el 7. Usted puede comprobar lo anterior observando la tabla de Marcelo.

Así, Marcelo podría conocer el término 22 de su serie de la siguiente manera:

$$d = 10 \text{ cm}$$

$$n = 22$$

$$E = 2 \text{ cm}$$

$$10 + [(22-1) (2 \cdot 2)] = 10 + [21 \cdot 4] 10 + 84 = 94$$

Esto quiere decir que si Marcelo da 22 vueltas a su carrete, éste tendrá un diámetro de 94 cm.

Así con la fórmula que encontró puede calcular cualquier término de su serie.



Para conocer el diámetro de su carrete, Marcelo necesitó sumar lo que se enredó la cuerda en cada vuelta. Si no se quiere o no se puede calcular todos los términos para después sumarlos, se puede utilizar lo que algunos matemáticos hace siglos encontraron para sumar los términos de una serie.

Observe usted cómo se obtiene una fórmula para sumar los términos de una serie.

$$S = 1, 2, 3, 4, \dots, [a + (n-1) d]$$

en donde:

S = suma de los términos

a = primer término

d = cantidad que se agrega

n = el número de término

Esta serie se puede representar de la siguiente manera:

$$S = a + [a + d] + [a + 2d] + [a + 3d] \dots + [a + (n - 4) d] + [a + (n - 3)d] + [a + (n - 2)d] + [a + (n - 1)d]$$

Si se suman dos series pero en una de ellas se inicia por el último número:

$$S = a + [a + d] + [a + 2d] + [a + 3d] \dots + [a + (n - 4)d] + [a + (n - 3)d] + [a + (n - 2)d] + [a + (n - 1)d]$$

$$+ S = [a + (n - 1)d] + [a + (n - 2)d] + [a + (n - 3)d] + [a + (n - 4)d] \dots + [a + 3d] + [a + 2d] + [a + d] + [a]$$

$$2S = [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d] \dots + [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d]$$

Se puede ver que todos los términos son iguales y además que éstos son en número igual que "n", por lo que se puede escribir que:

$$2S = n [2a + (n-1) d]$$

Suma de
dos series

despejando la S, se tiene:

$$S = \frac{n}{2} [2a + (n-1) d]$$

Con esta fórmula se puede obtener la suma de los términos de una serie. En ella, sus literales significan lo siguiente:

S = suma de la serie aritmética

n = número de términos

a = primer término

d = cantidad constante que se suma o se resta

Ejemplo

Si se quiere conocer la suma de los primeros 200 números pares:

$$2 + 4 + 6 + 8 + \dots n = S$$

Se tiene que:

$$a = 2, d = 2 \text{ y } n = 200$$

$$S = \frac{n}{2} [2a + (n-1) d]$$

$$S = \frac{200}{2} [2(2) + (200 - 1) 2]$$

$$S = 100 [402] = 40,200$$

Para saber el último término (u_n) de esta serie se tiene:

$$u_n = a + (n - 1) d$$

$$u_n = 2 + (200 - 1) 2 = 2 + 398 = 400$$

Con estas fórmulas, Marcelo podría ahorrar mucho tiempo en el cálculo de los cachetes de su carrete. Observe usted cómo haría sus cálculos.



Como la longitud a enredar de la cuerda es 10 m y esto se logra al sumar el perímetro de cada vuelta, la suma de la serie será de:

$$10 \text{ m} = 1,000 \text{ cm}$$

$$S = \frac{n}{2} [2d + (n-1) (2 E)] p$$

Observe que los términos de la serie se multiplicaron por **p** para obtener el perímetro de la cuerda que se enreda con cada vuelta. En la fórmula se tiene que:

$$S = 1,000 \text{ cm} \text{ ----- suma de la serie}$$

$$n = ? \text{ ----- número de vueltas (términos)}$$

$$d = 10 \text{ cm} \text{ ----- cantidad de inicio}$$

$$E = 2 \text{ cm} \text{ ----- espesor de la cuerda}$$

Sustituyendo:

$$1,000 = \frac{n}{2} [(2 (10) + (n-1) 2 (2)) (3.14)]$$

$$1,000 = \frac{n}{2} [(120 + (4n - 4)) 3.14]$$

$$1,000 = \frac{n}{2} [6.28 + 12.56 n - 12.56]$$

$$1,000 = 3.14 n + 6.28 n^2 - 6.28 n$$

$$1,000 = 25.12 n + 6.28 n^2$$

Esta ecuación es de segundo grado, por lo que se puede resolver aplicando la fórmula general:

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En donde
 $b = 25.12$
 $a = 6.28$
 $c = -1,000$

Sustituyendo:

$$n = \frac{-25.12 \pm \sqrt{(25.12^2) - 4(6.28)(-1,000)}}{2(6.28)}$$

$$n = \frac{-25.12 \pm \sqrt{631.01 + 25,120}}{12.56}$$

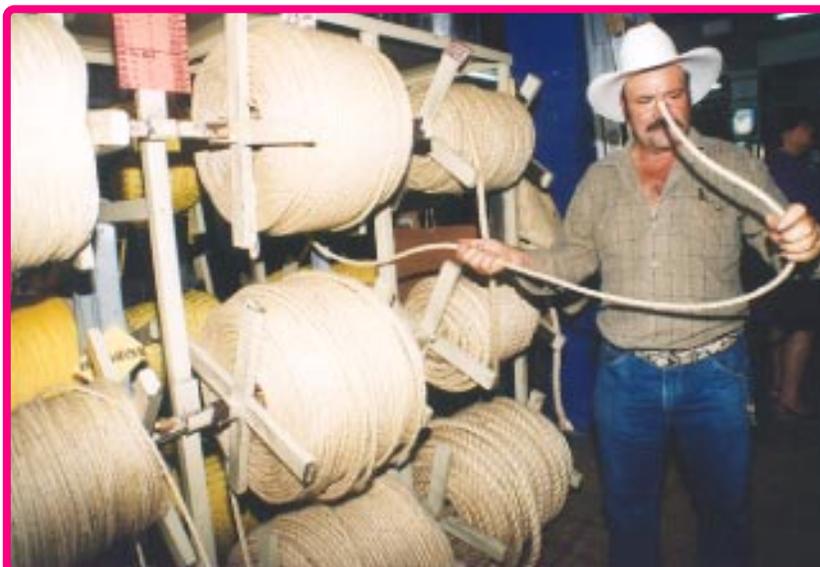
$$n = \frac{-25.12 \pm 160.47}{12.56}$$

Como en este problema la respuesta sólo puede ser positiva, se tiene que :

$$n = \frac{-25.12 + 160.47}{12.56}$$

$$n = 10.77$$

Con lo que se obtiene que con menos de 11 vueltas se enredan los 10 metros de la cuerda de Marcelo.



Todo lo anterior señalado para las series es para definir una fórmula o ecuación que sirva para calcular los términos de las series y la suma de ellas. No siempre es necesario conocer dichas fórmulas o ecuaciones, en ocasiones, por sentido común, se calculan los términos.

En los problemas de matemáticas, las series son muy utilizadas ya sea para el planteamiento de los problemas o para el planteamiento de fórmulas que den su solución.

Por lo regular, las series se presentan como un conjunto de números, todos en orden, y la definición de una regla o fórmula para calcular los números que van antes o que siguen se hacen de manera sencilla por medio de la reflexión.

Ejemplos

95, 90, 85, _____, 75, 70, 65

Como se puede observar, a cada número se le van restando 5 para definir el siguiente, por lo que el número que falta es el 80.

68, 75, 82, 89, 96, 103, _____

En esta serie, se van sumando 7 a cada número para conocer el número que sigue, por lo que el número que falta es el 110.

79, 72, 66, 59, 53, 46, _____

En esta serie, primero se restan 7 al número para obtener el siguiente y luego a ese que se obtuvo se le restan 6. Observe la solución:

$$\begin{aligned}79 - 7 &= 72 \\72 - 6 &= 66 \\66 - 7 &= 59 \\59 - 6 &= 53 \\53 - 7 &= 46 \\46 - 6 &= 40\end{aligned}$$

El número que falta es el 40.

128, 64, 32, 16, 8, 4, _____

Observe que en esta serie se divide al número entre 2 para obtener el siguiente, por lo que el número que falta es:

$$\frac{4}{2} = 2$$

144, 72, 24, 12, 4, _____

En esta serie, primero se divide entre dos para obtener el siguiente número y ese se divide entre tres. Observe la secuencia:

$$144 \div 2 = 72$$

$$72 \div 3 = 24$$

$$24 \div 2 = 12$$

$$12 \div 3 = 4$$

$$4 \div 2 = 2$$

El número que falta se obtiene dividiendo a $4 \div 2 = 2$

7, 24, 17, 34, 27, 44, _____

En esta serie, en cada tercer término se agregan 10. Observe la secuencia:

$$7 + 10 = 17$$

$$17 + 10 = 27$$

$$27 + 10 = 37 \text{ (Este número es el que sigue)}$$

$$24 + 10 = 34$$

$$34 + 10 = 44$$

